草稿

河邊昌彦

2001 年 5 月 29 日

1　概念定義

ケプラー予想の証明を進めるにあたって、まず、その中で用いられる概念について定義をしておく。

1.1　Delaunay 分割

ケプラー予想では、無限の空間への半径 1 の球の充填を扱うことになる。そこでまず、この無限の空間を (無限個の) 多面体に分割することを考える。

ここでは空間を、球の中心を頂点とする多面体に分割する。このとき、分割によってできた多面体は次の性質を満たすようにする。即ち、多面体の外接球をとると、その多面体の頂点を構成する球の中心を除いた全ての球の中心は外接球の内部にはない、という性質である。このような多面体への分割は、一部の例外を除いて一意的に行うことができる ([1] p.2)。

この分割を Delaunay(ドロネー) 分割と呼び、分割によってできた多面体を (Delaunay) simplex と呼ぶ。

面心立方格子 (の一部) の Delaunay 分割の様子を図 1 に、その結果できた simplex を図 2 に示す。ただし図 2 で実際には、球を切り取っている正四面体や四面体が simplex である。

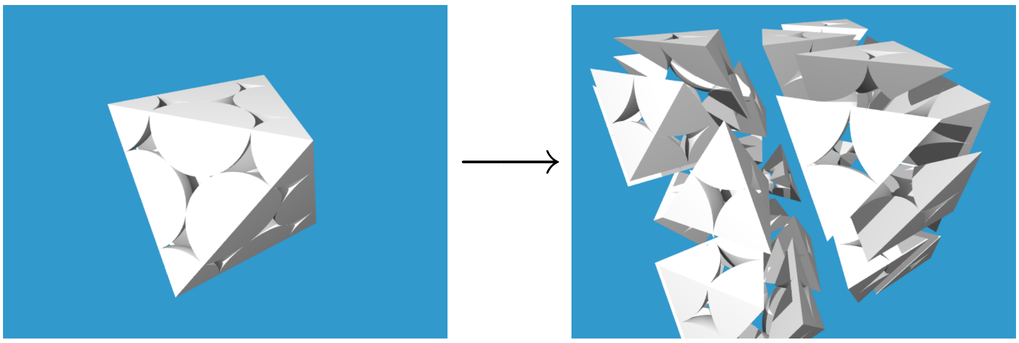
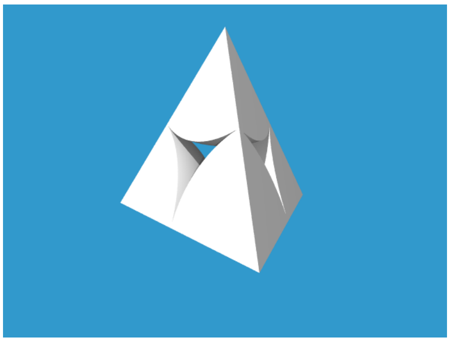


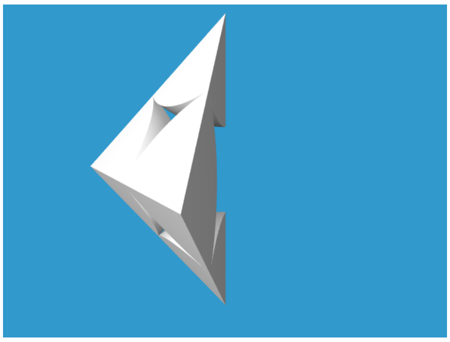
図 1: Delaunay 分割

1.2　Delaunay star

ある一つの球を選び、その中心を v_0 とする。Delaunay 分割によって、空間が simplex に分割されると、v_0 の周りには、頂点として v_0 を共有する simplex が集まることになる。この星状に集



(a) 正四面体



(b) 四面体 (正八面体の 1/4)

図 2: Delaunay simplex

まった simplex の集合を Delaunay star と呼び、D^* で表す。
図 1 に現れている simplex は、中心の球に関する Delaunay star を構成している。

1.3 スコア関数の定義

simplex S に対して、$\delta(S)$ は S の密度、$\mathrm{vol}(S)$ は S の体積、$\mathrm{sol}_i(S)$ は i 番目の頂点の立体角とする。球の半径は 1 であるので、密度 $\delta(S)$ は、

$$\delta(S) = \frac{S \text{ 内の球の体積}}{S \text{ の体積}} = \frac{\sum_i \mathrm{sol}_i(S)/3}{\mathrm{vol}(S)}$$

である。
また、図 3 の正八面体を oct とし、その密度を δ_{oct} とする。即ち、

$$\begin{aligned}
\delta_{oct} = \delta(oct) &= \frac{\sum_i \mathrm{sol}_i(oct)/3}{\mathrm{vol}(oct)} \\
&= \frac{6}{3} \cdot \frac{\mathrm{sol}_0(oct)}{\mathrm{vol}(oct)} \\
&= 2 \cdot \frac{4 \arcsin(1/3)}{8\sqrt{2}/3} \\
&= \frac{3 \arcsin(1/3)}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{-3\pi + 12 \arccos(1/\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\
&\approx 0.720903
\end{aligned}$$

である。
ここで、

$$\Gamma(S) = \mathrm{vol}(S) \cdot (\delta(S) - \delta_{oct}) = -\delta_{oct} \,\mathrm{vol}(S) + \sum_i \mathrm{sol}_i(S)/3$$

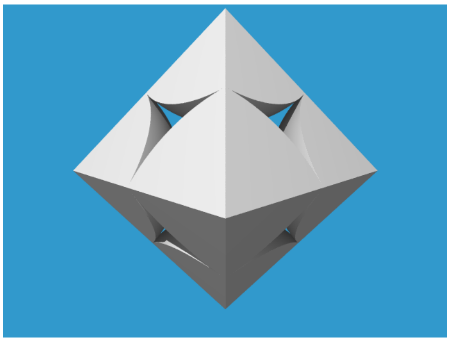


図 3: 正八面体

という関数を考える。この関数は、$\delta(S) > \delta_{oct}$ ならば、S の体積に比例する正の値になる。また、$\delta(S) < \delta_{oct}$ ならば、S の体積に比例して負の値となる (図 4)。従って、空間内の simplex 全体で考

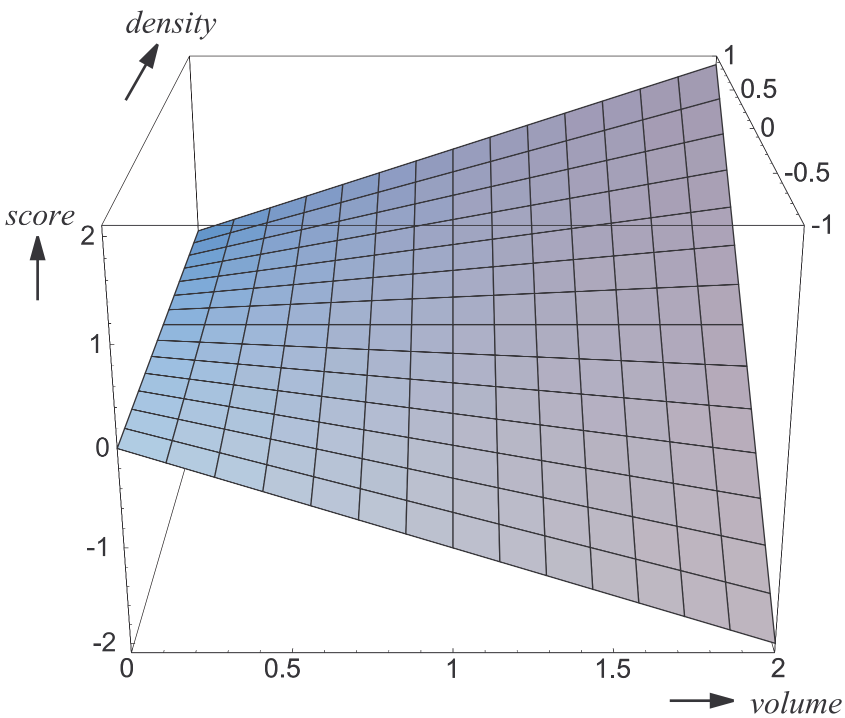


図 4: $\Gamma(S)$

えると、

- 密度が高く体積も大きい。
- 密度は低いが体積も小さい。

という simplex で構成されていると $\Gamma(S)$ の合計は大きな値になり、

- 密度が高いが体積が小さい。

- 密度が低く体積が大きい。

という simplex で構成されていると、$\Gamma(S)$ の合計は小さくなる。

即ち、$\Gamma(S)$ によって、S が全体の密度を高くするのにどれほど貢献しているか、ということを測ることができる。

この $\Gamma(S)$ のような S の指標をスコアと呼び、その関数を $\sigma(S)$ とする。この他にもスコアとなる関数があり、場合分けによって使い分けることになる。ただし、ここでは $\sigma(S) = \Gamma(S)$ の場合のみを扱うことにする。

$\Gamma(S)$ の定義より、図 3 の正八面体のスコアは 0 である。また、スコアの大きさの基準として、図 2(a) の正四面体のスコアを $1pt$ と定め、スコアを計る単位とする。つまり、図 2(a) の正四面体を tet とすると、

$$\begin{aligned}
1pt &= \Gamma(tet) \\
&= \mathrm{vol}(tet) \cdot (\delta(tet) - \delta_{oct}) \\
&= \mathrm{vol}(tet) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{3} \mathrm{sol}_i(tet)/3}{\mathrm{vol}(tet)} - \mathrm{vol}(tet) \cdot \delta_{oct} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \frac{\mathrm{sol}_i(tet)}{3} - \delta_{oct} \cdot \mathrm{vol}(tet) \\
&= \frac{4}{3}\left(2\pi - 6 \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{-3\pi + 12 \arccos(1/\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \\
&= \frac{11}{3}\pi - 12 \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\approx 0.0553736
\end{aligned}$$

である。図 2(b) の simplex は、正八面体を四等分したものであるので、その密度は図 3 の正八面体と同じである。従って、スコアは $0pt$ になる。

スコアの定義を拡張し、Delaunay star D^* に対しても値を定義する。即ち、

$$\sigma(D^*) = \sum_{S \in D^*} \sigma(S) = \sum_{S \in D^*} \Gamma(S)$$

と定義する。

面心立方格子や六方最密構造の Delaunay star には図 2(a) の simplex が 8 個、図 2(b) の simplex が 24 個含まれている (図 1) ので、そのスコアは、

$$1pt \times 8 + 0pt \times 24 = 8pt$$

となる。

1.4 スコアと密度の関係

以下では、充填されている球の中心のことを頂点と呼ぶことにする。

B_N を半径 N の球、Λ_N を B_N 内の頂点の集合とする。即ち、

$$\begin{aligned}
B_N &= \left\{x \;\middle|\; |x| \le N\right\} \\
\Lambda_N &= \left\{v \;\middle|\; |v| \le N\right\}
\end{aligned}$$

である。ここで、全ての Delaunay star のスコアが $8pt$ 以下ならば、B_N と Λ_N の間には次の関係があることがわかる ([1], pp.7–8)。

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{3}|\Lambda_N|\cdot\frac{1}{3\,\mathrm{vol}(B_N)} &\leq \frac{\delta_{oct}}{1-3\cdot 8pt/16\pi}+\frac{O(N^2)}{\mathrm{vol}(B_N)}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{18}}+\frac{O(N^2)}{O(N^3)}\end{aligned}$$

$N\to\infty$ とすると、左辺は空間全体の密度に、右辺は $\pi/\sqrt{18}$ に近づく。

面心立方格子と六方最密構造の密度は、$\pi/\sqrt{18}$ である。従って、“いかなる Delaunay star であってもそのスコアは $8pt$ 以下である” ということが証明できれば、$\pi/\sqrt{18}$ が密度の最大である、ということが言え、ケプラー予想が証明される。

1.5　リージョン

前節の結果から、Delaunay star についてそのスコアの上限を求めればよい、ということが分かった。そこで、Delaunay star の構造を解析するために、それに含まれている辺を単位球面上に投影する。具体的には、次のようにする。

1. Delaunay star に含まれている頂点のうち、中心との距離が 2.51 より大きいものを取り除く。同時に、その頂点を端点とする辺も取り除く。
2. 残った辺のうち、長さが 2.51 より大きいものを取り除く。
3. 残った辺のうち、端点の片方が中心であるものをさらに取り除く。
4. Delaunay star の中心に半径 1 の球面を描く。
5. 残っている辺の各々について、辺と Delaunay star の中心で三角形を作る。
6. 4 と 5 の交線を球面上に描く。

このことによって、Delaunay star の辺が単位球面上の弧に投影される。

この投影によってできた弧によって、単位球面は球面上多角形に分割される。この球面上の多角形をリージョンと呼ぶ。各リージョンには、一個以上の simplex が含まれている。そこで、リージョンに対してもスコアを定義し、それは含まれている simplex のスコアの合計とする。即ち、リージョン R に対し、

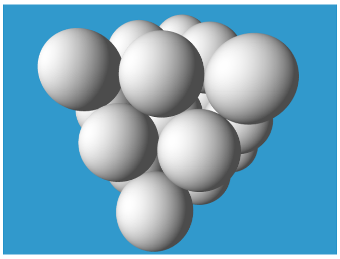
$$\sigma(R)=\sum_{S\in R}\sigma(S)=\sum_{S\in R}\Gamma(S)$$

となる。

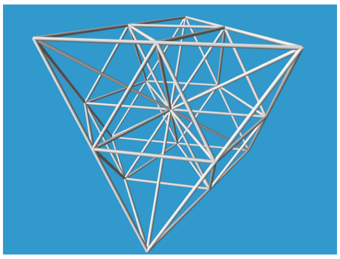
単位球面のリージョンへの分割の様子を図 5 に示した。

2　証明の場合分け

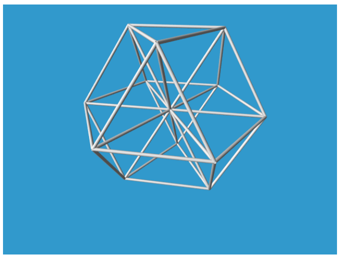
ここから、ケプラー予想の証明の本題に入る。ケプラー予想の証明は、全体として非常に長いものであり、数多くの場合分けがなされている。ここでは、その場合分けの方法、及びその中の一つに関して説明する。



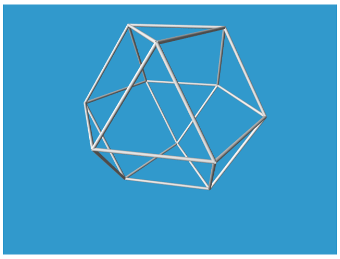
(a) 面心立方格子



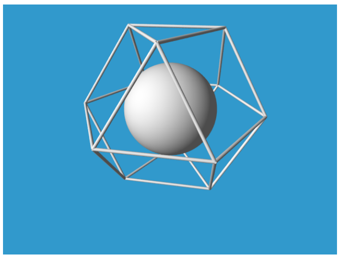
(b) Delaunay star の辺



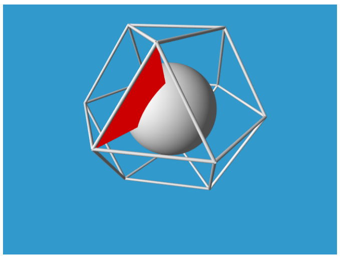
(c) 中心との距離が 2.51 より大きい頂点を取り除く



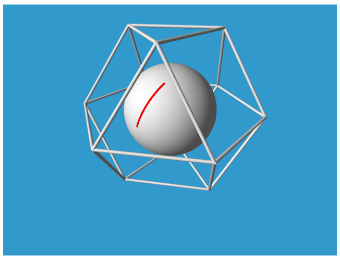
(d) 中心を通る辺を取り除く



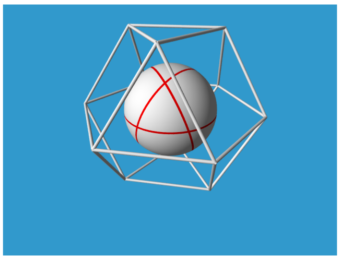
(e) 中心に単位球を描く



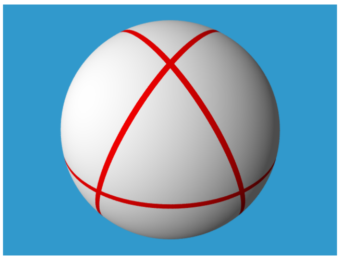
(f) 中心と辺で三角形を作る



(g) 交線を引く



(h) 他の辺についても同様にする



(i) 結果

図 5: リージョンへの分割

2.1　5 ステップ

ケプラー予想の証明は、まず、大きく 5 個のステップに分けられる ([1] pp.8–10)。

1. 全てのリージョンが (球面上の) 三角形である場合、その Delaunay star のスコアは $8pt$ 以下である。
2. 三角形以外のリージョンのスコアは、$0pt$ 以下である。
3. 三角形と四角形のリージョンのみの場合、その Delaunay star のスコアは $8pt$ 以下である (5 の場合を除く)。
4. リージョンの中に五角形以上の多角形がある場合、その Delaunay star のスコアは $8pt$ 以下である。
5. 五角柱状の Delaunay star のスコアは $8pt$ 以下である。

ここでは、ステップ 1 の証明について説明する。

2.2　9 条件

まず、ステップ 1 に場合分けされる Delaunay star のうち、スコアが $8pt$ より大きくなるものが存在すると仮定する。すると、その Delaunay star のリージョン分割は以下の 9 個の条件を全て満たさなければならない ([1] pp.21–26)。ただし、N をリージョン分割の頂点数、N_i をリージョン分割の degree i の頂点数とする。

1. $13 \leq N \leq 15$
2. $N = N_4 + N_5 + N_6$

3–9. (略)

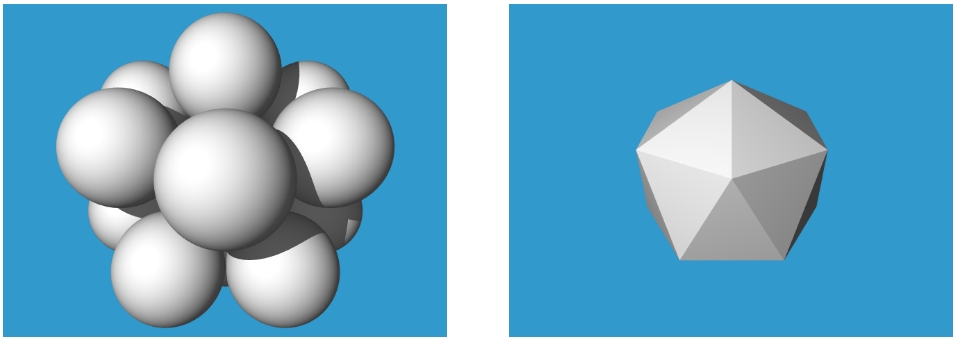
結論だけを言えば、これらの条件を満たすリージョン分割の方法は唯一つである ([1] pp.26–28, pp.57–60)。逆にいえば、それ以外の全ての場合に関しては、スコアは $8pt$ 以下であることが示された。

2.3　24 面体の場合

前節において、条件を全て満たしたリージョン分割の Delaunay star は 24 面体である (図 6)。このような 24 面体に関しては、上の条件だけでは十分なスコアの上界を得ることができない。そこで、24 面体が持つ性質を使って新たに条件を加え、$8pt$ より小さい上界を得ることを試みる。

まず、この Delaunay star を D^* とし、それを L_1, L_2, L_3 の 3 個の部分に分ける (図 7)。

それぞれについて場合分けをすると、数値計算の結果から次のことが分かる ([1] pp.28–29)。ただし、図 6 で最も上にある頂点を v_0 とし、中心に対しその反対側にある頂点を $v_0{}'$ とする。また、



(a) 詰め込み　(b) Delaunay star

図 6: 24 面体

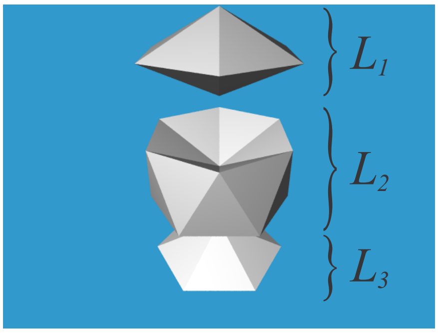


図 7: 分割

中心に対する L_i の立体角を $\mathrm{sol}(L_i)$ とする。即ち、$\mathrm{sol}(L_1)+\mathrm{sol}(L_2)+\mathrm{sol}(L_3)=4\pi$ である。

$$
\begin{aligned}
&\sigma(L_1) < -3.04pt && (|v_0| \geq 2.05) && (1)\\
&\sigma(L_1) < -2.5pt && (|v_0| < 2.05,\ \mathrm{sol}(L_1) \leq (4\pi - 6.48)/2,\ \forall v \in L_2 : |v| < 2.2) && (2)\\
&\sigma(L_1) < -1.52pt && (other) && (3)\\
&\sigma(L_2) < 10.5pt && (\exists v \in L_2 : |v| \geq 2.2) && (4)\\
&\sigma(L_2) < 11.039pt && (\mathrm{sol}(L_2) < 6.48) && (5)\\
&\sigma(L_2) < 12pt && (other) && (6)\\
&\sigma(L_3) < -3.04pt && (|v_0{}'| \geq 2.05) && (7)\\
&\sigma(L_3) < -2.5pt && (|v_0{}'| < 2.05,\ \mathrm{sol}(L_3) \leq (4\pi - 6.48)/2,\ \forall v \in L_2 : |v| < 2.2) && (8)\\
&\sigma(L_3) < -1.52pt && (other) && (9)
\end{aligned}
$$

従って、$\sigma(D^*)=\sigma(L_1)+\sigma(L_2)+\sigma(L_3)$ の上界 σ_u は、

$$\sigma_u = -1.52pt + 12pt - 1.52pt = 8.96pt$$

となりそうである。実際、前節の 9 個の制約だけでは (3), (6), (9) しか導けないので、$8pt$ 以下の

上界は得られなかった。ところが、(3), (6), (9) は、全て同時には成り立たないのである。よって、σ_u は、(3), (5), (9) から

$$\sigma_u = -1.52pt + 11.039pt - 1.52pt = 7.999pt$$

となる。即ち、

$$\sigma(D^*) < \sigma_u = 7.999pt$$

である。

2.4 数値計算

前節の不等式は数値計算によって証明されたものであるが、そのことについて詳しく述べる。ここでは、(4) を取り上げ、具体的な証明方法を示す。

L_2 は 12 個の simplex から成っており、中心を除く頂点は 3 個の simplex で共有されている。従って、次のことが示されれば (4) が証明される。

$$\sigma(S) < 0.5pt \qquad (\exists v \in S : |v| \geq 2.2) \tag{10}$$

$$\sigma(S) \leq 1pt \qquad (other) \tag{11}$$

何故ならば、v $(\in L_2)$ が $|v| \geq 2.2$ であるとすると、v を共有する simplex S_1, S_2, S_3 のスコアは (10) から、

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma(S_i) < 1.5pt$$

となる。また、残りの 9 個の simplex $S_4, \ldots, S_{12}$ に関しては、(11) から、

$$\sum_{i=4}^{12} \sigma(S_i) \leq 9pt$$

である。これらを合わせれば、

$$\sigma(L_2) = \sum_{i=1}^{12} \sigma(S_i) < 10.5pt$$

となる。

リージョンへ分割する際に、長さが 2.51 より長い辺は取り除いてあった。また、ステップ 1 では、全てのリージョンは三角形である。従って、ここに現れる simplex の各辺の長さは、$[2, 2.51]$ に含まれている ($\because$ 2.51 より長い辺があると、四角形以上のリージョンになる)。そして、(4) の条件から、長さが 2.2 以上の辺が存在する。よって、(10) は次のように言い換えても一般性は失われない。

> simplex S の辺の長さを $y_1, \ldots, y_6$ とすると、
>
> $$y_1 \in [2.2, 2.51], \quad y_2, \ldots, y_6 \in [2, 2.51]$$
>
> ならば
>
> $$\sigma(S) < 0.5pt$$

2.5 まとめ

示すべきことをまとめると以下のようになる。

simplex S の辺の長さを $y_1, \ldots, y_6$ とする。

$$
\begin{aligned}
\sigma(S) = \Gamma(S) &= -\delta_{oct}\,\mathrm{vol}(S) + \sum_i \mathrm{sol}_i(S)/3 \\
\delta_{oct} &= \frac{3\arcsin(1/3)}{\sqrt{2}} \\
1pt &= \frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{14}{3}\arcsin\frac{1}{3} \\
y_1 &\in [2.2, 2.51] \\
y_i &\in [2, 2.51] \qquad\qquad (2 \le i \le 6)
\end{aligned}
$$

としたときに、

$$\sigma(S) < 0.5pt$$

となる。

以下では、区間演算を使ってこの不等式を証明する。

参考文献

[1] Thomas C. Hales, “Sphere Packings I”, arXiv:math.MG/9811073