



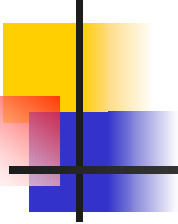
ケプラー予想と数値計算

G99P043-4 河邊昌彦
G99p094-1 内藤一兵衛
G99P146-1 八幡淳



はじめに

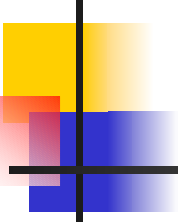
- ケプラー予想の概要・・・八幡
- ケプラー予想の証明・・・河邊
- 証明に使う数値計算・・・内藤



ケプラー予想(1)

■ ケプラー予想とは・・・

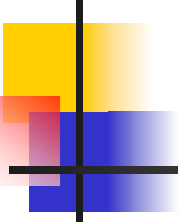
「ケプラーの法則」で有名なヨハネス・ケプラーは、無限の空間において同半径の球を敷き詰めたとき、最密充填は面心立方格子であると予想した。これが「ケプラー予想」である。



ケプラー予想(2)

- ケプラー予想は証明されたのか？

長い間、完璧な証明はされていなかった。
しかし1997年にThomas C. Halesという人物が、
これを証明した。興味深いことにその過程で、
数値計算が使用されている。



ケプラー予想(3)

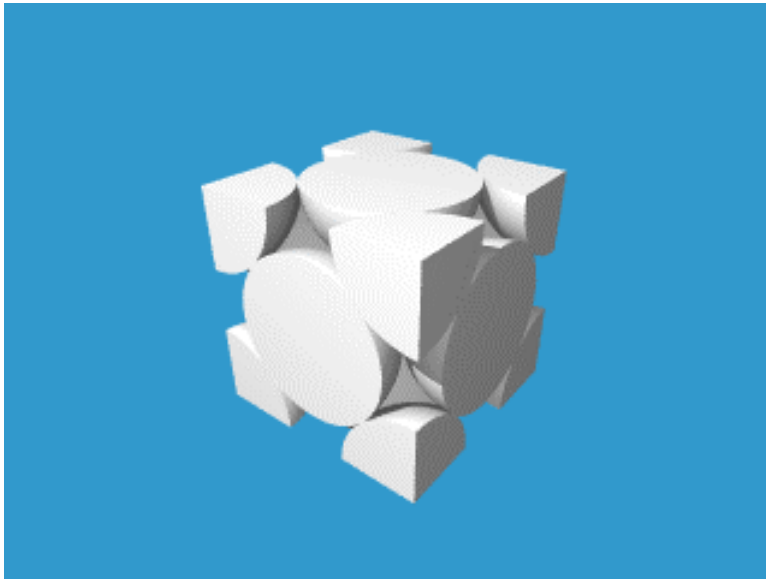
■ 最密充填

ケプラーは面心立方格子が最密充填であると予想したが、実は六方最密構造もまた最密充填である。

なぜ最密充填が2種類もあるのか？

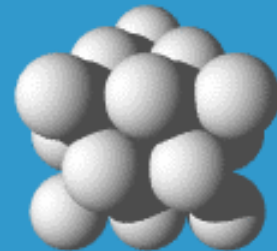
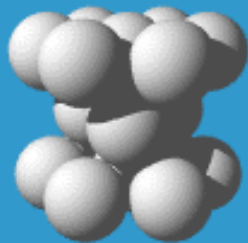
面心立方格子

立方体に敷きつめたものを区切ったとき、
各々の面に球の中心がくる構造。



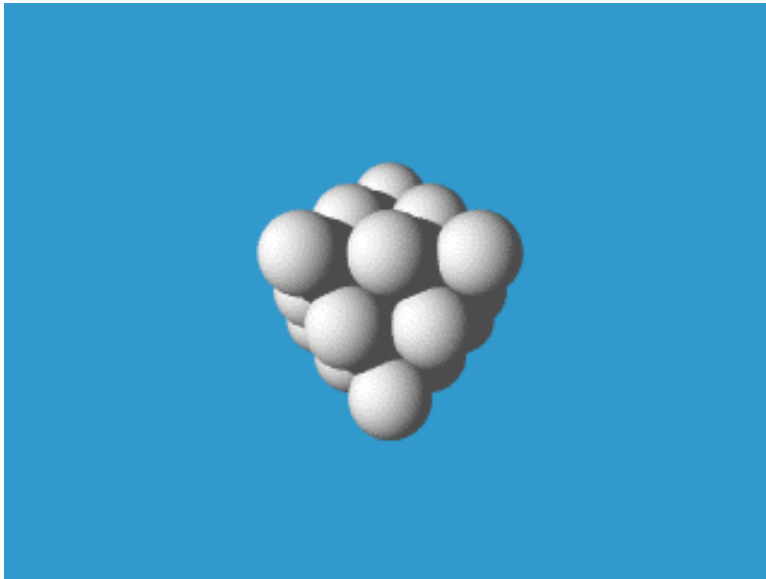
六方最密構造

ある同一平面上で、1つの球に対して6個の球が接していて六角形になってる構造。

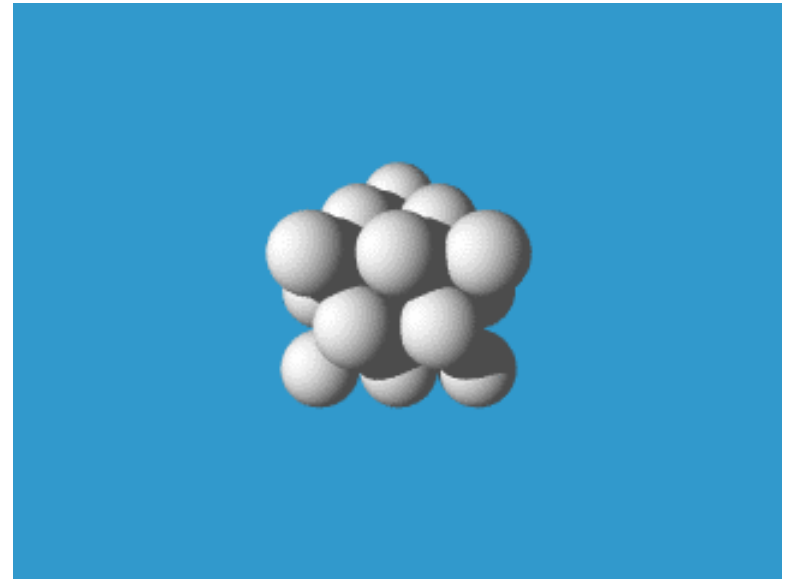


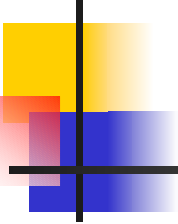
2つの構造の比較

面心立方格子



六方最密構造





2つの構造の特徴

- 任意の球に接する球は12個
- 充填密度

空間に対する球の占める割合

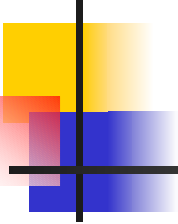
最密充填の充填密度 = $\pi/\sqrt{18}$



数値計算との関連

■ 証明の概要

ケプラー予想の証明をするにあたって、
構造的な条件より様々な場合わけが生じる。
その中で、充填密度が $\pi/\sqrt{18}$ をこえる
構造が皆無であることを証明すれば良い。
その証明の中で区間演算が使われる。



数値計算との関連(2)

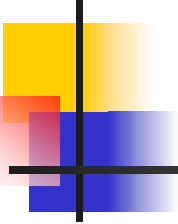
- 区間演算の使用
 - 変数が多い
 - 多項式が出てくる
 - ArcCotが出てくる



ケプラー予想の定式化

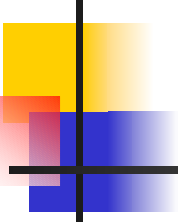
G99P043-4

河邊昌彦



証明の流れ (1)

- 概念定義
 - 基本的な概念
 - Delaunay 分割
 - Delaunay star
 - スコア
 - リージョン分割



証明の流れ (2)

- 証明

- リージョンによる場合分け
- 5個のステップに分ける

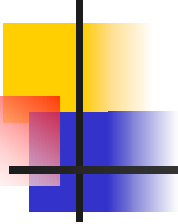
- ステップ1

- 条件を列挙
 - 証明すべき対象を絞り込む
- 最終的に残ったもの
 - 数値計算による証明



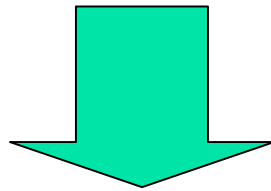
基本的な概念

- 充填する空間
 - 3次元空間全体
- 充填する物体
 - 半径1の球
- 密度
 - 空間全体に対する、球の占める割合
 - 最密構造の密度は $\pi/\sqrt{18}$



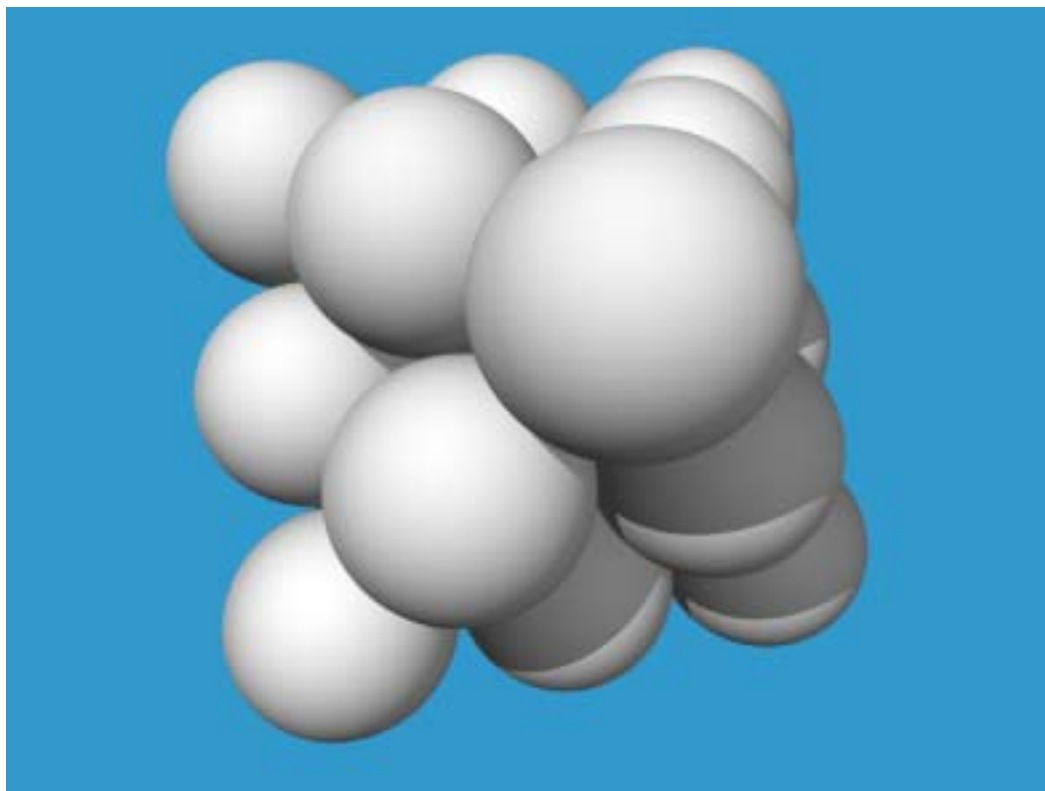
Delaunay 分割

- simplex
 - 球の中心を頂点とする四面体
 - simplexの外接球の内側には、頂点が存在しない



空間をsimplexの集合に分割

Delaunay 分割 (例)



面心立方格子

Delaunay 分割 (例)

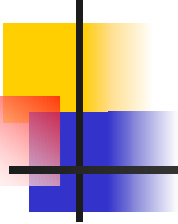


中心の占める空間

Delaunay 分割 (例)

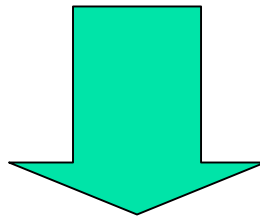


Delaunay 分割



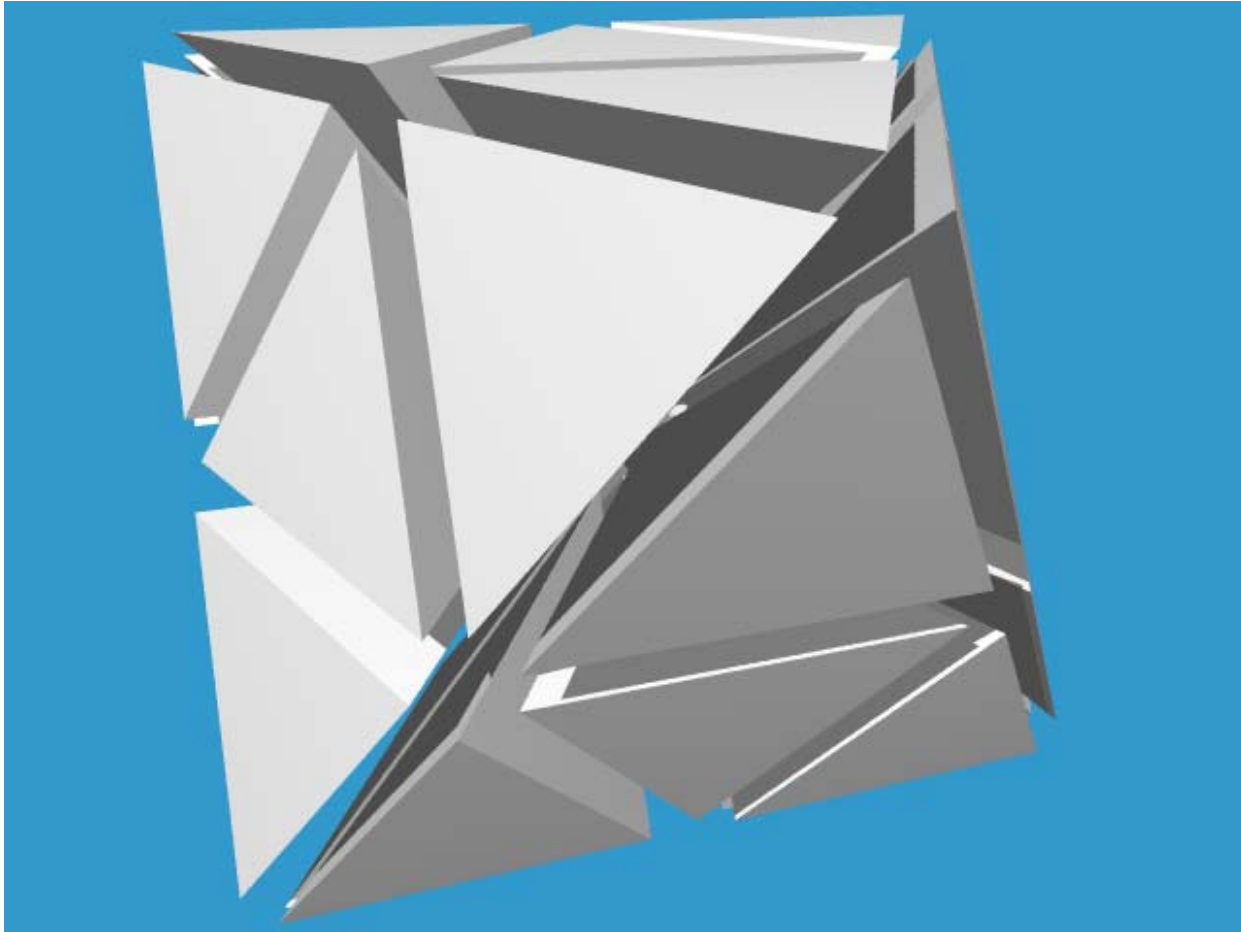
Delaunay star

- 一つの頂点に注目すると...
 - その頂点を共有しているsimplexが周りに集まっている



これらのsimplexの集合を
Delaunay starと呼ぶ

Delaunay star (例)





スコア (1)

- simplexの密度を測る指標
- “ pt ”(ポイント)という単位で測る
- 密度と体積が大きいほど高くなる
- 基準
 - 正四面体 — $1pt$
 - 正八面体 — $0pt$



スコア (2)

■ 定義

$$\Gamma(S) = \text{vol}(S) \cdot (\delta(S) - \delta_{oct})$$

$\text{vol}(S)$: S の体積

$\delta(S)$: S の密度

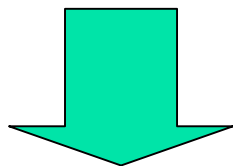
δ_{oct} : 正八面体の密度

$$1pt \approx 0.0553736$$

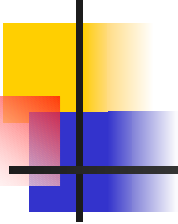
スコア (3)

- スコアと密度の関係

全てのDelaunay starのスコアが $8pt$ 以下



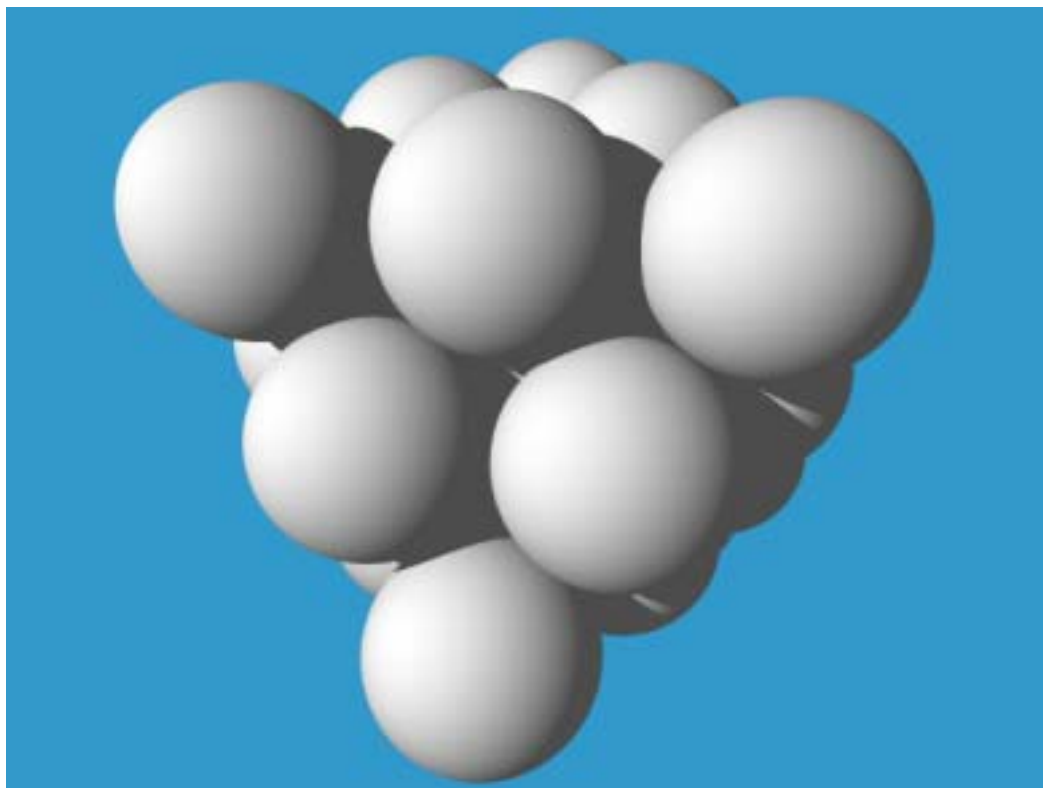
空間全体の密度は $\pi/\sqrt{18}$ 以下
つまり、**ケプラー予想が成立する**



リージョン分割

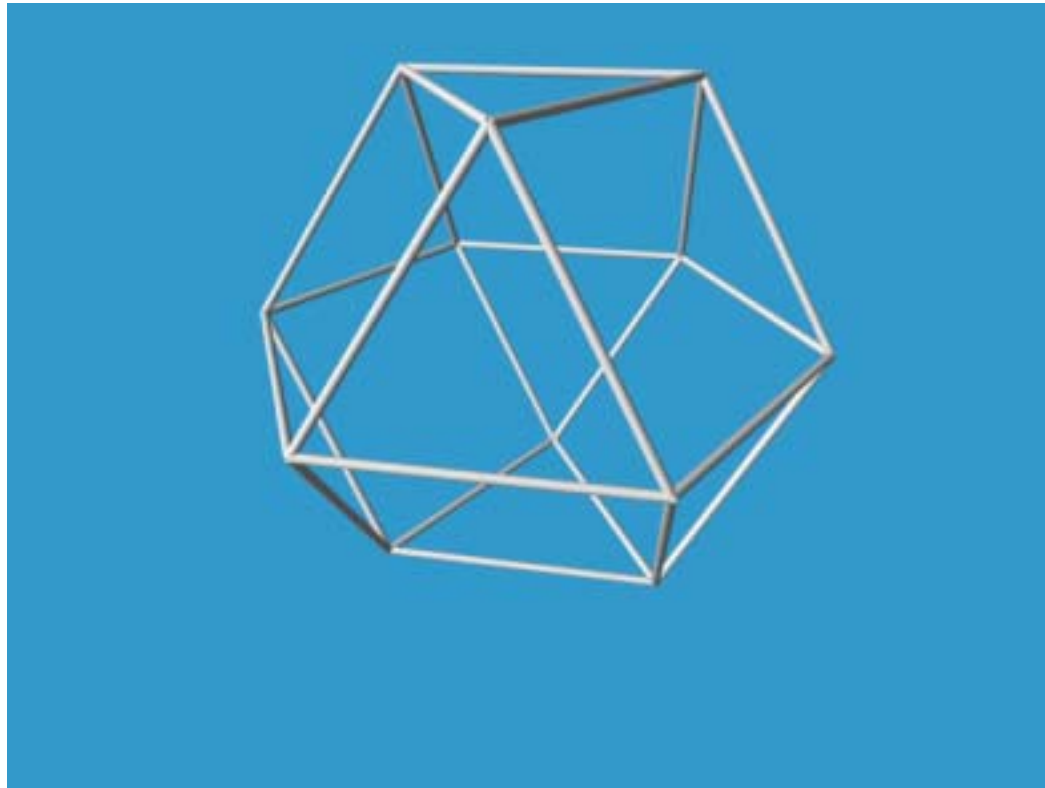
- Delaunay starを球面上に投影
 - 頂点 球面上の点
 - 辺 点を結ぶ弧
 - 面 弧に囲まれた領域 = リージョン
- 球面がリージョンに分割される

リージョン分割 (例)



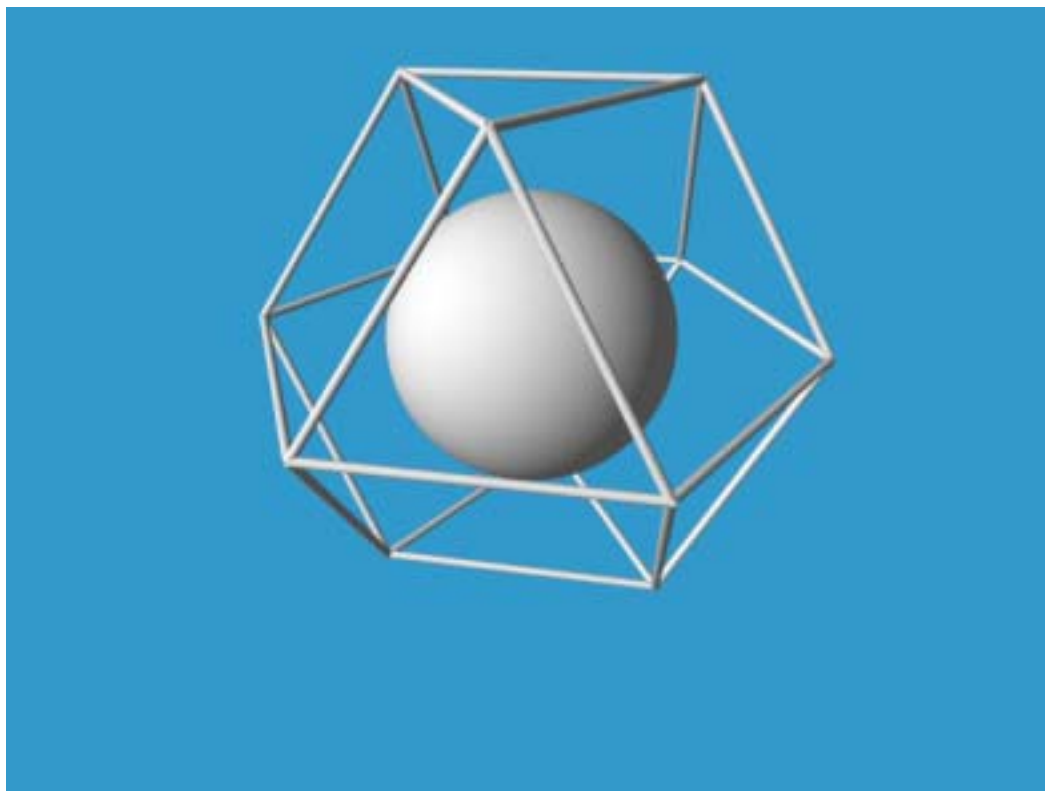
面心立方格子

リージョン分割 (例)



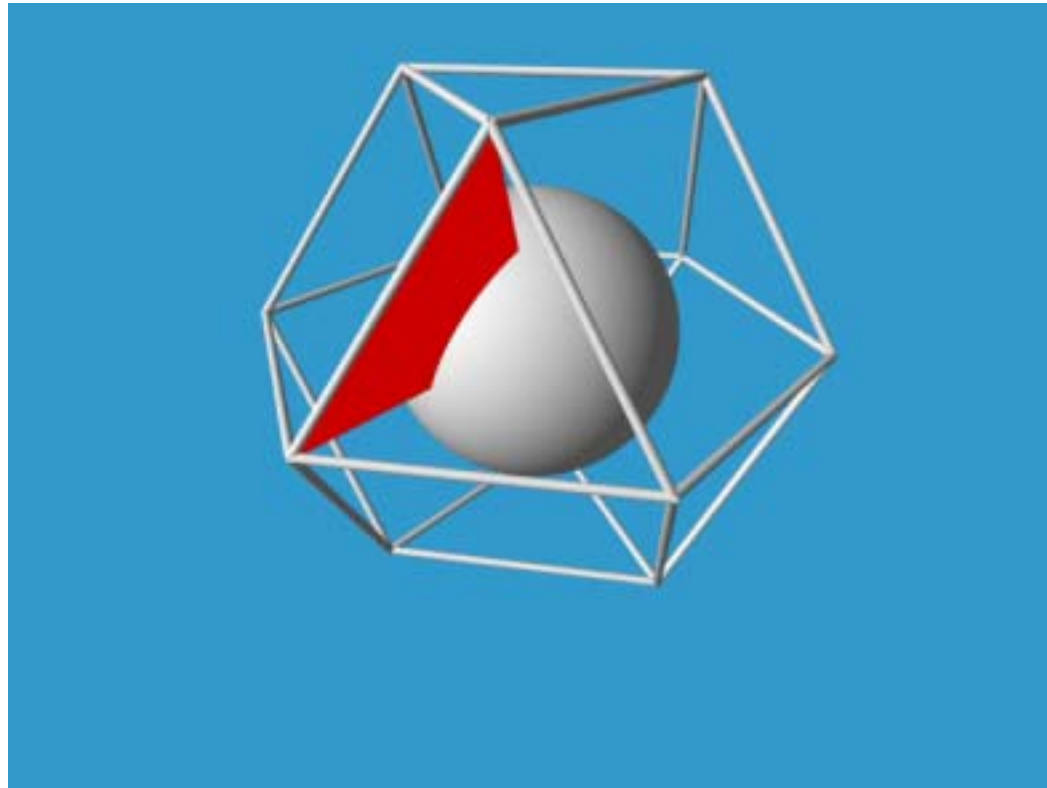
Delaunay starの辺

リージョン分割 (例)



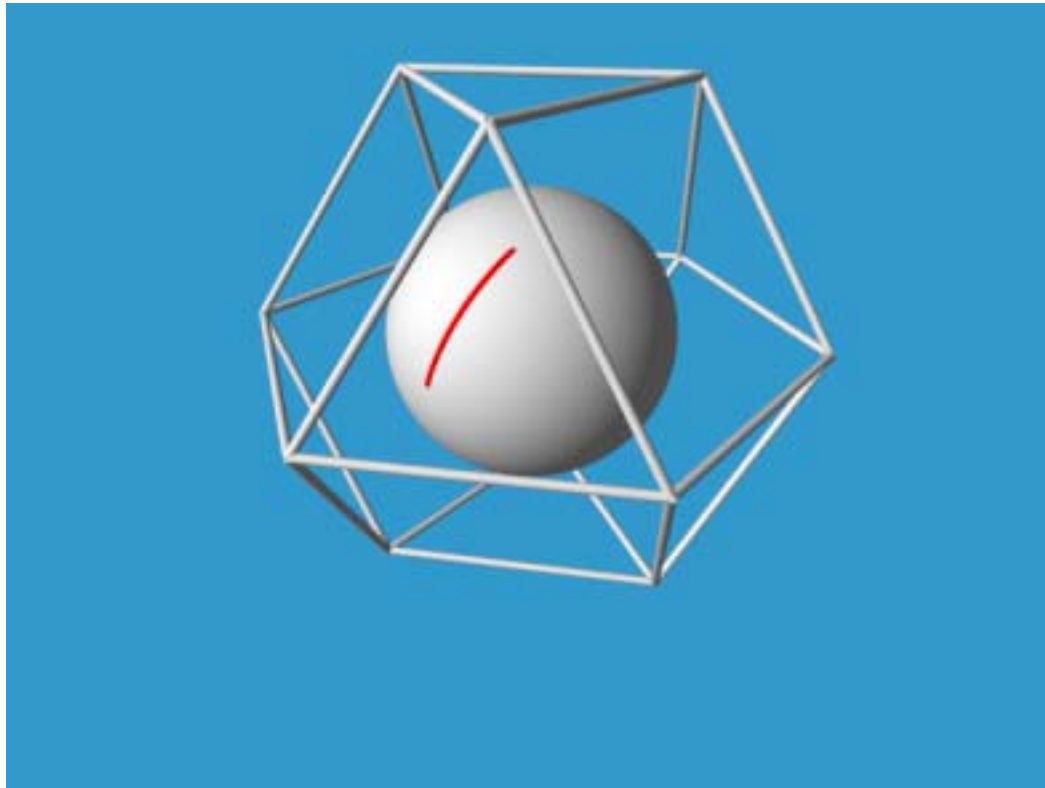
中心に単位球を描く

リージョン分割 (例)



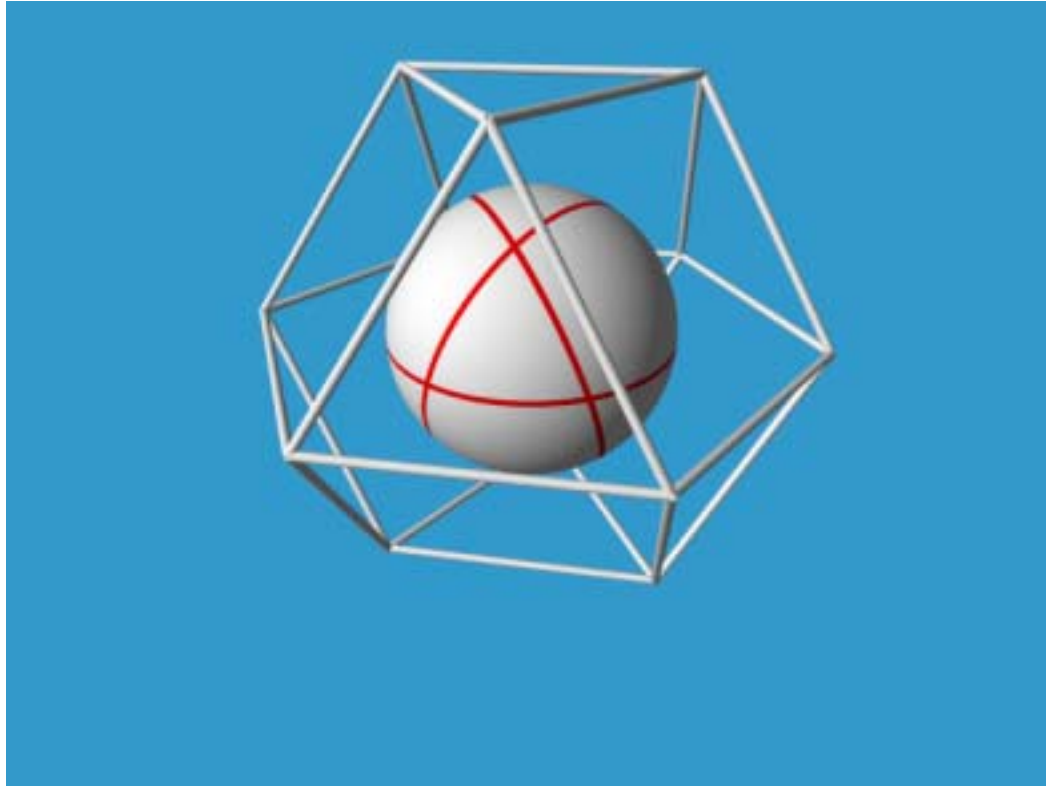
球の中心へ辺を投影する

リージョン分割 (例)

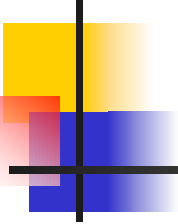


球面上の弧に投影される

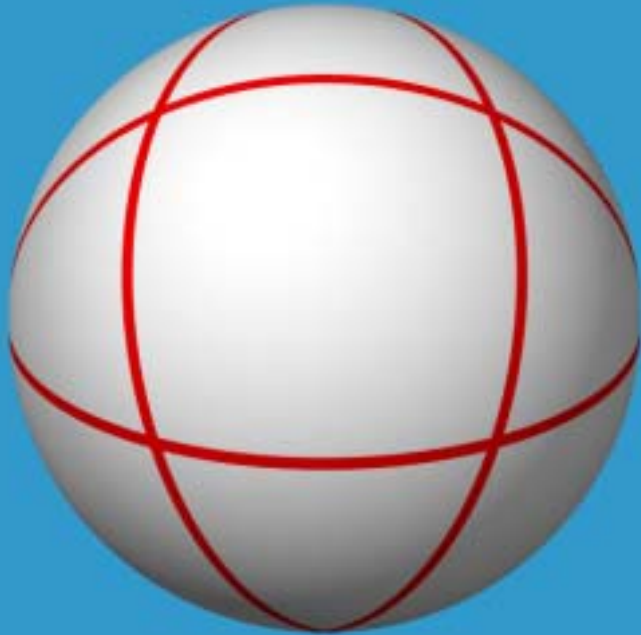
リージョン分割 (例)



他の辺に関しても、同様にする



リージョン分割 (例)



球面がリージョンに分割された



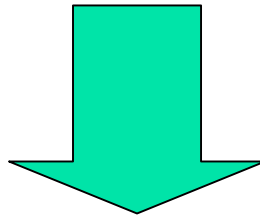
リージョンによる場合分け

- 証明を5個のステップに分ける
 1. 全てのリージョンが三角形の場合
 2. 全てのリージョンが三角形以外の場合
 3. 三角形と四角形のリージョンのみの場合
 4. 五角形以上のリージョンがある場合
 5. 3の特殊な場合
- それぞれの場合でスコアの上界を求める



ステップ1 (条件)

- スコアが $8pt$ を越える Delaunay star が存在すると仮定



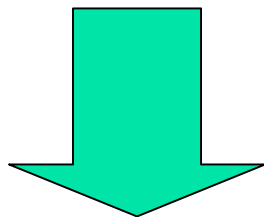
満たさなければならない条件を列挙

その結果...



ステップ1 (結果)

- 条件を満たすものは一つだけ

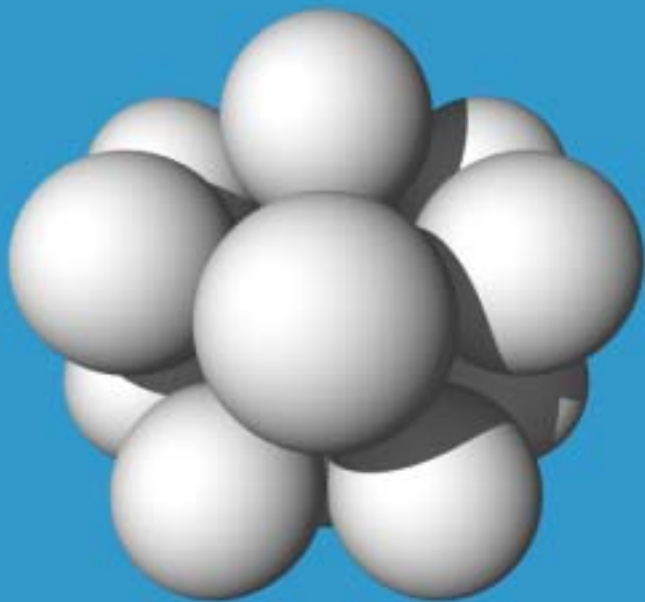


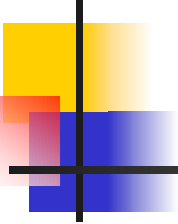
それ以外のものはスコアが $8pt$ 以下

つまり、それらに関しては
ケプラー予想が成り立っている

ステップ1 (結果)

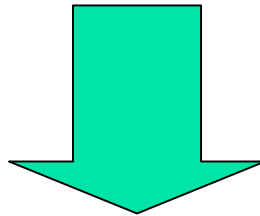
- 唯一、 $8pt$ を超える可能性が残っている Delaunay star (24面体)



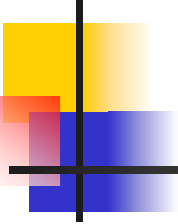


24面体の場合分け

- 更に細かく場合分けをする
 - Delaunay starの辺の長さに関する場合分け

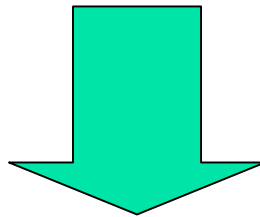


例えば、simplexのある一つの辺の長さが
2.2以上の場合



一つの場合

- ある一つの辺の長さが2.2以上のsimplex
- このsimplexのスコアが $0.5pt$ 以下



Delaunay star全体のスコアは $8pt$ より小さい

つまり、**ケプラー予想が成り立つ**



まとめ

- simplex S の辺の長さを $y_1, \dots, y_6$ とすると

$$y_1 \in [2.2, 2.51]$$

$$y_i \in [2, 2.51] \quad (2 \leq i \leq 6)$$

ならば

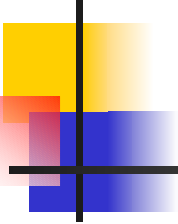
$$\Gamma(S) < 0.5pt$$

であることを示せばよい



区間演算を使った証明

G99P094-1 内藤一兵衛

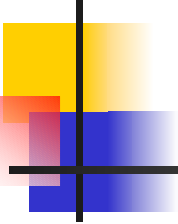


ケプラー予想の数式の整理

$$y_1 \in [2.2, 2.51], y_2, \dots, y_6 \in [2, 2.51]$$

$$\Gamma(S) = -\delta_{oct} vol(S) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 sol_i(S) < 0.5pt$$

となることを証明する。



$\Gamma(S)$ 関数

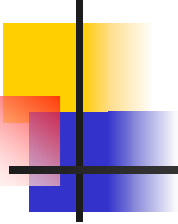
$$\Gamma(S) = -\delta_{oct} vol(S) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 sol_i(S)$$

Γ 関数は下の3つに分解できる

δ_{oct} 正8面体の密度

$vol(S)$ S の体積

$sol_i(S)$ S の*i*番目の頂点の立体角



[ArcCot]を含む式の区間演算

$$sol_i(S) = 2arccot\left(\frac{2a}{\Delta}\right)$$

(a と Δ は y の多項式)

この式の範囲はそのままでは出ない。
そこで、テイラー不等式を用いて $sol(S)$
を2つの多項式で挟み込むことで区間
評価する。



テイラー不等式

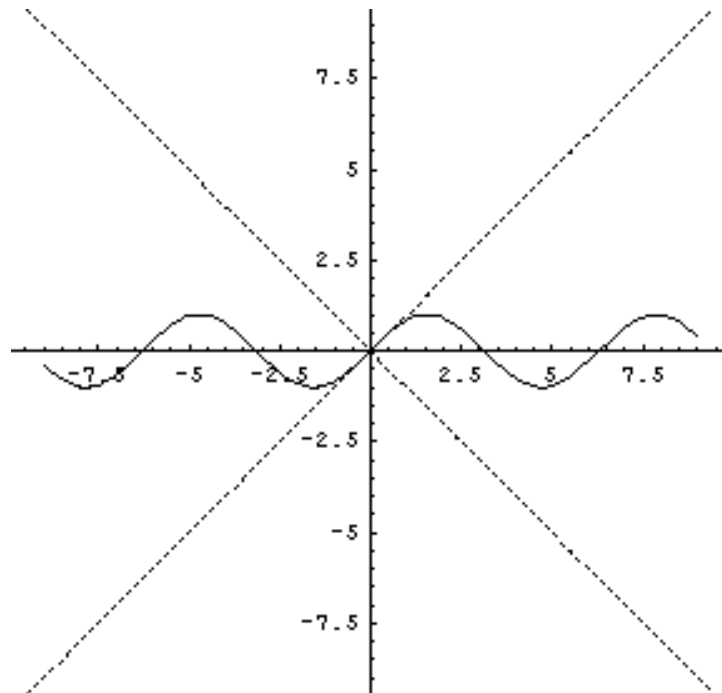
一般の C^{n+1} 級の関数 $f(t)$ で考える。 a を中心とした $f(t)$ の n 次テイラー展開を $p_n(t)$ とし、 m, M を $f^{(n+1)}(t)$ の下界と上界、 $\alpha(t) = (t - a)^{n+1}/(n + 1)!$ とすると、次のようになる。

$$p_n(t) + \alpha(t)m \leq f(t) \leq p_n(t) + \alpha(t)M \quad (\alpha(t) > 0)$$

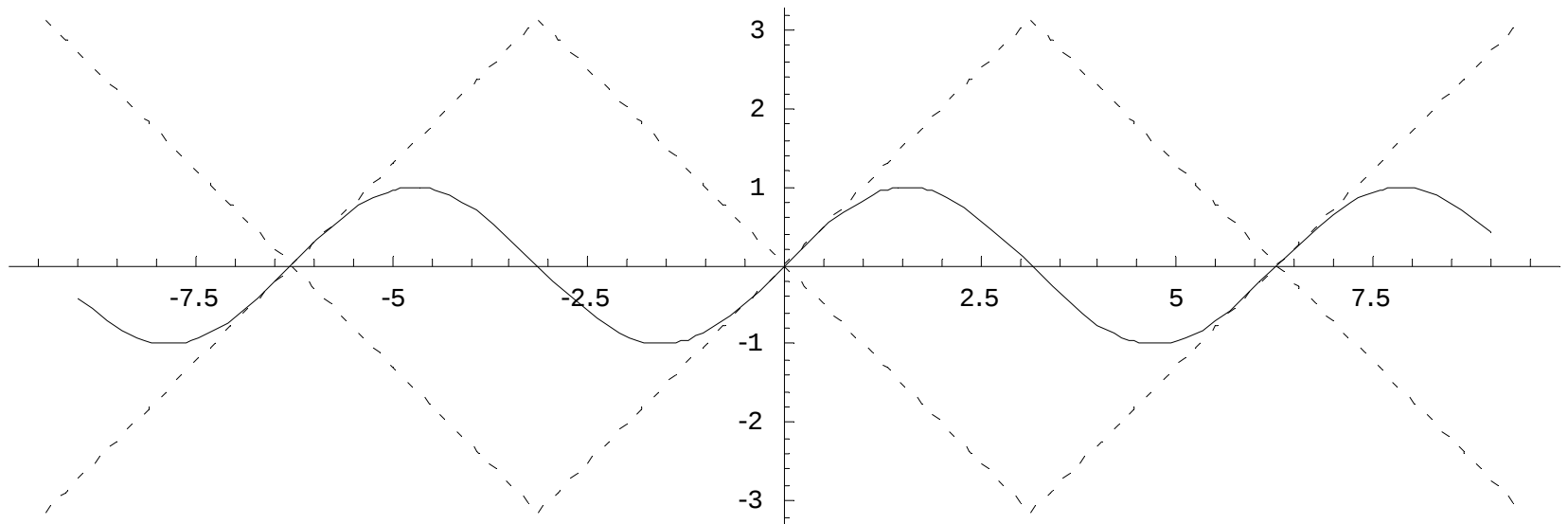
$$p_n(t) + \alpha(t)M \leq f(t) \leq p_n(t) + \alpha(t)m \quad (\alpha(t) < 0)$$

初等関数を多項式で 挟みこむ手法の説明

話を簡単にするため $y = \sin X$ で考える



初等関数を多項式で 挟みこむ手法の説明





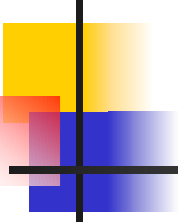
分けなかった場合

[2.2,2.2][2,2] [2,2]
[2,2.51] [2,2.51] [2,2.51]
をそのまま代入すると

$$\Gamma(S) = [-2.47, 2.51]$$

という値が返ってくる。

しかしこの範囲では0.5pt (0.027)
を超えてしまう。



分けた場合

[2.2,2.2][2,2][2,2]

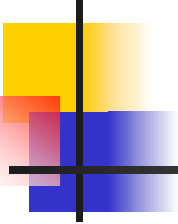
[2.04781, 2.06375][2.09562, 2.11156]

[2.33469, 2.35063]

という範囲を分けた時

[-0.123423, 0.0139137]

$$\Gamma(S) < 0.5pt \quad 0.027$$



プログラム

アルゴリズム

- 与えられた y の範囲でスコアを区間評価する。
- 0.5pt未満でなければ、半分に分割しそれぞれをもう一度再帰的に計算させる



結果

実行結果

30分で、71640個に分割した時プログラムが止まった。

この結果

$$\Gamma(S) < 0.5pt$$

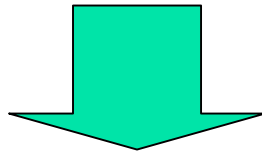
が成り立つことが証明できた。

従って、この場合ケプラー予想が成り立つことが示された。



全体のまとめ

- ケプラー予想の証明は、構造的な場合分けによって分割される
 - 一つの場合について、数値計算による証明を示した
 - 他の場合も、数値計算を使って証明される



数値計算が証明の要になっている