数値計算講義ノート３

区間演算

大石進一

April 21, 2003

区間演算

区間とは

$$[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \boldsymbol{R} | \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\} \tag{1}$$

である。ただし，$\underline{x} \leq \overline{x} \in \boldsymbol{R}$ で，それぞれ区間の下端，上端を表す。

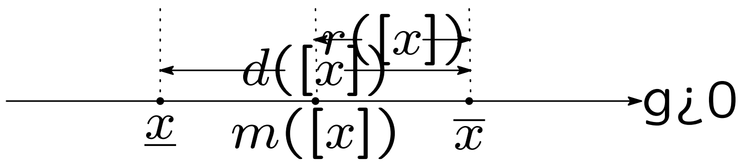
$$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] \tag{2}$$

と区間を表す。

区間 $[x]$ について以下を定義する。

$$d([x]) = \overline{x} - \underline{x},\ r([x]) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2},\ m([x]) = \frac{\overline{x} + \underline{x}}{2} \tag{3}$$

$d([x])$，$r([x])$，$m([x])$ をそれぞれ区間 $[x]$ の**直径** (diameter)，**半径** (radius)，**中心** (center) という。



区間 $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ の直径 $d([x])$，半径 $r([x])$，中心 $m([x])$

区間 $[x]$ の最小絶対値と最大絶対値：

$$
\begin{aligned}
\langle [x] \rangle &= \mathsf{min}\{|x| \ |x \in [x]\} \\
|[x]| &= \mathsf{max}\{|x| \ |x \in [x]\} = \mathsf{max}\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

二つの区間の四則演算をつぎで定義する。

$$
[x] \circ [y] = \{x \circ y | x \in [x],\ y \in [y]\} \tag{5}
$$

ただし，$\circ \in \{+, -, \times, /\}$。これを**区間演算** (interval arithmetic) という。
つぎが成立する。

$$
\begin{aligned}
[x] + [y] &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] \\
[x] - [y] &= [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}] \\
[x] \times [y] &= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}] \\
[x]/[y] &= [x] \times \left[\frac{1}{\overline{y}}, \frac{1}{\underline{y}}\right], \ (0 \notin [y])
\end{aligned}
\tag{6}
$$

区間 $[x]$，$[y]$ の乗算 $[x][y]$

	$y \geq 0$	$y \ni 0$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}]$	$[\overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}]$	$[\overline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}]$
$x \ni 0$	$[\underline{x}\overline{y}, \overline{x}\overline{y}]$	$[\min\{\underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}]$	$[\overline{x}\underline{y}, \underline{x}\underline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}]$	$[\underline{x}\overline{y}, \underline{x}\underline{y}]$	$[\overline{x}\overline{y}, \underline{x}\underline{y}]$

区間 $[x]$，$[y]$ の除算 $[x]/[y]$

	$y \geq 0$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$[\underline{x}/\overline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\underline{y}]$
$x \ni 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$x \leq 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\overline{y}]$	$[\overline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$

包包含関係における単調性：

$$[x] \subseteq [x'],\ [y] \subseteq [y'] \Rightarrow [x] \circ [y] \subseteq [x'] \circ [y'],\ \circ \in \{+, -, \times, /\} \tag{7}$$

加法と乗法に関し交換則と結合則：

$$\begin{aligned} &[x] \circ [y] = [y] \circ [x],\ \circ \in \{+, \times\} \\ &[x] \circ ([y] \circ [z]) = ([x] \circ [y]) \circ [z],\ \circ \in \{+, \times\} \end{aligned} \tag{8}$$

しかし，加法と乗法の逆元は存在しない。また，分配則も区間演算に対しては成立しない。そのかわりつぎの**劣分配則**(subdistributive law)が成立する。

$$[x] \times ([y] + [z]) \subseteq [x] \times [y] + [x] \times [z] \tag{9}$$

この式で等号は例えば区間 $[y]$ と $[z]$ が同じ符号をもつときに成立する。

関数$f : D \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$を領域$D$の任意の閉区間の上で連続な初等関数とする。関数$f$をつぎのようにして$I\boldsymbol{R}$上の関数に拡張することができる。

$$f([x]) = \{f(x)|x \in [x]\} \tag{10}$$

例をあげよう。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{abs}([x]) = [\langle [x] \rangle, |[x]|] \\
&f([x]) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})],\ (f \in \{\mathrm{arctan},\ \mathrm{arcsin}, \mathrm{sinh}, \mathrm{tanh}\} \\
&f([x]) = [f(\overline{x}), f(\underline{x})],\ (f \in \{\mathrm{arccot},\ \mathrm{arcoth}\} \\
&[x]^2 = [\langle [x] \rangle^2, |[x]|^2] \\
&\sqrt{[x]} = [\sqrt{\underline{x}}, \sqrt{\overline{x}}] \\
&e^{[x]} = \exp([x]) = [e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}]
\end{aligned} \tag{11}$$

fの演算規則を単純に区間演算で置き換えた演算規則によって定義される関数をfの**区間拡張**(interval extension)といい$f_{[\ ]}$で表す。

$$f([x]) \subseteq f_{[\ ]}([x]) \tag{12}$$

§2 機械区間演算

区間演算を与えられた浮動小数点数システム $\boldsymbol{F}$ 上に展開する方法を示そう。

$$I\boldsymbol{F} = \{[x] \in I\boldsymbol{R} | \ \underline{x}, \ \overline{x} \ \in \boldsymbol{F}\} \tag{13}$$

とする。$I\boldsymbol{F}$ の要素を**機械区間**(machine interval) という。機械区間演算はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned}
&[x] + [y] = [\triangledown(\underline{x} + \underline{y}), \triangle(\overline{x} + \overline{x})] \\
&[x] - [y] = [\triangledown(\underline{x} - \overline{y}), \triangle(\overline{x} - \underline{x})] \\
&[x] * [y] = [\min\{\triangledown\underline{x}\underline{y}, \triangledown\underline{x}\overline{y}, \triangledown\overline{x}\underline{y}, \triangledown\overline{x}\overline{y}\}, \max\{\triangle\underline{x}\underline{y}, \triangle\underline{x}\overline{y}, \triangle\overline{x}\underline{y}, \triangle\overline{x}\overline{y}\}] \\
&[x]/[y] = [\min\{\triangledown\underline{x}/\underline{y}, \triangledown\underline{x}/\overline{y}, \triangledown\overline{x}/\underline{y}, \triangledown\overline{x}/\overline{y}\}, \\
&\max\{\triangle\underline{x}/\underline{y}, \triangle\underline{x}/\overline{y}, \triangle\overline{x}/\underline{y}, \triangle\overline{x}/\overline{y}\}]
\end{aligned} \tag{14}$$

中心と半径による区間

区間演算におけるかけ算は場合分けも多く，複雑である。これをシンプルに計算するために区間の中心と半径による表示を考える。まず，点かける区間の計算が簡単にできることを示そう。αを実数とする。区間を$[\beta-\delta,\beta+\delta]$と表す。$\beta$は区間の中心で$\delta\geq 0$は半径である。このとき

$$\alpha[\beta-\delta,\beta+\delta]=[\alpha\beta-|\alpha|\delta,\alpha\beta+|\alpha\delta] \tag{15}$$

が成立する。ただし，四則演算は厳密にできるとする。実際

$$\begin{aligned}\min\{\alpha\beta-\alpha\delta,\alpha\beta+\alpha\delta\}&=\alpha\beta-|\alpha\delta|=\alpha\beta-|\alpha|\delta\\ \max\{\alpha\beta-\alpha\delta,\alpha\beta+\alpha\delta\}&=\alpha\beta+|\alpha\delta|=\alpha\beta+|\alpha|\delta\end{aligned} \tag{16}$$

より式15が示された。

つぎに，区間かける点の計算も簡単にできることを示そう。α，β，δを実数とし，$\delta\geq 0$とする。このとき

$$[\alpha-\delta,\alpha+\delta]\beta=[\alpha\beta-|\beta|\delta,\alpha\beta+|\beta|\delta] \tag{17}$$

となる。証明は同様なので省略する。

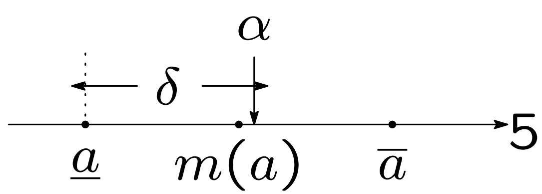
区間と区間どうしのかけ算は過大評価となるが，つぎの関係式が成立する。α，β，δ，γを実数とし，$\delta \geq 0$，$\gamma \geq 0$ とする。

$$\begin{aligned}&[\alpha-\delta,\alpha+\delta][\beta+\gamma,\beta+\gamma]\\ \subset\ &[\alpha\beta-|\alpha|\gamma-|\beta|\delta-\delta\gamma,\alpha\beta+|\alpha|\gamma+|\beta|\delta+\delta\gamma]\end{aligned} \tag{18}$$

この計算の右辺は過大評価であるが，過大評価の大きさはそれほどではなく，たかだか正確な計算によって得られる区間幅の1.5倍程度までであることが知られている。

機械区間演算を用いるときの注意点について述べよう。区間 $[\underline{a},\overline{a}]$ が与えられたとき，中心と半径の区間表示にする際にはつぎのような計算を行う。

$$\begin{aligned}&\textbf{setround(up)}\\ \alpha &= \frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}+\underline{a};\\ \delta &= \alpha-\underline{a};\end{aligned} \tag{19}$$



このとき

$$[a] \subset [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \tag{20}$$

が成立する。また，機械演算としてはつぎのような計算をする。

$$\begin{aligned}
&\alpha[\beta - \delta, \beta + \delta] = [\triangledown(\alpha\beta + (-|\alpha|)\delta), \triangle(\alpha\beta + |\alpha|\delta)] \\
&[\alpha - \delta, \alpha + \delta]\beta = [\triangledown(\alpha\beta + (-|\beta|)\delta), \triangle(\alpha\beta + |\beta|\delta)], \\
&[\alpha - \delta, \alpha + \delta][\beta - \gamma, \beta + \gamma] \subset \\
&[\triangledown(\alpha\beta + (-|\alpha|)\gamma + (-|\beta|)\delta + (-\delta)\gamma), \triangle(\alpha\beta + |\alpha|\gamma + |\beta|\delta + \delta\gamma)]
\end{aligned} \tag{21}$$