数値計算講義ノート 8
連立一次方程式の反復解法

– ヤコビ法とガウス・ザイデル法 –

May 26, 2003

係数行列の分離

連立一次方程式

$$Ax = b$$

を考える。但し、$A = (a_{i,j})$ は $n \times n$ 行列、b は n 次ベクトル。

行列 A の分離

$$A = D + A_L + A_R,$$

但し、

対角行列 D

$$
\begin{aligned}
D &= \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

狭義下三角行列 A_L

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

狭義上三角行列 A_R

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n} \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(MATLABによる行列分離の実演)

ヤコビ法

対角行列 D の対角成分がすべて非ゼロとすると

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}).$$

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Rightarrow \quad & (D + A_L + A_R)x = b \\ \Rightarrow \quad & Dx = -(A_L + A_R)x + b \\ \Rightarrow \quad & x = -D^{-1}(A_L + A_R)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

不動点方程式

$$\begin{cases} x = g(x) \\ g(x) = -D^{-1}(A_L + A_R)x + D^{-1}b \end{cases} \qquad (*)$$

$x^{(0)}$ を適当な n 次元ベクトルとして逐次反復

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(A_L + A_R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

により解を求める方法をヤコビ法という (固有値解法のヤコビ法とは別物)。

ヤコビ法 (成分毎)

$$x_j^{(k+1)} = -\sum_{m=1, m\neq j}^{n} \frac{a_{jm}}{a_{jj}} x_m^{(k)} + \frac{b_j}{a_{jj}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(MATLABによるヤコビ法の実演)

ガウス・ザイデル法

$x^{(0)}$ を適当な n 次元ベクトルとして逐次反復

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(A_L x^{(k+1)} + A_R x^{(k)}) + D^{-1}b$$

により解を求める方法をガウス・ザイデル法という。

ガウス・ザイデル法 (成分毎)

$$x_j^{(k+1)} = -\sum_{m=1}^{j-1} \frac{a_{jm}}{a_{jj}} x_m^{(k+1)} - \sum_{m=j+1}^{n} \frac{a_{jm}}{a_{jj}} x_m^{(k)} + \frac{b_j}{a_{jj}}$$

但し、$j = 1, 2, \ldots, n$ の順に解くものとする。

(MATLABによるガウス・ザイデル法の実演)

反復解法の収束条件

(別ファイルで説明)