

情報系の物理学レボ - ト第 3 回

情報学科

g99p100 - 1

中村 好一

出題日 2000 - 10 - 25

提出期限 2000 - 11 - 7

提出日 2000 - 11 - 8

問題

長さ π の弦の中心の一部 (幅 a) を $t = 0$ でたたいたとする。

$t = 0$ で、

$$\mu(x, 0) = f(x) = 0$$

$$0 \quad \left(0 \leq x < \frac{(L-a)}{2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 1 \quad \left(\frac{(L-a)}{2} \leq x \leq \frac{(L+a)}{2} \right)$$

$$0 \quad \left(\frac{(L+a)}{2} < x \leq L \right)$$

としたときの、 $\mu(x, t)$ の変化を $t \geq 0$ で、解析して図示せよ。

ただし、弦は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

とみたく動くとする。

解答

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を解くと、

$$\mu(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos P_n t + B_n \sin P_n t) \sin P_n x$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{n\pi} \int_{\frac{L-a}{2}}^{\frac{L+a}{2}} \sin nx dx \\ &= \left(-\frac{2}{\pi n^2} \right) [\cos nx]_{\frac{L-a}{2}}^{\frac{L+a}{2}} \\ &= -\frac{2}{\pi n^2} \left\{ \cos \frac{n(L+a)}{2} - \cos \frac{n(L-a)}{2} \right\} \end{aligned}$$

三角関数の加法定理を使って、

$$= \frac{2}{\pi n^2} * 2 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{na}{2}$$

ゆえに、

$$B_n = \frac{4}{\pi n^2} * \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{na}{2}$$

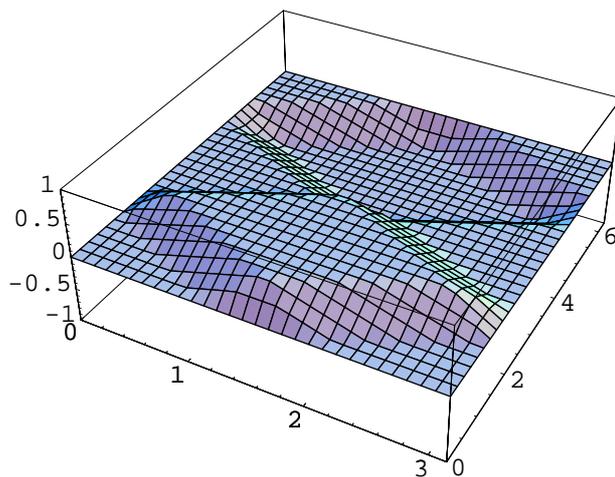
よって、

$$\mu(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} * \sin \frac{na}{2} * \sin nt * \sin nx$$

以下に、グラフを示す。

(A) $a = \frac{\pi}{4}$ のとき、

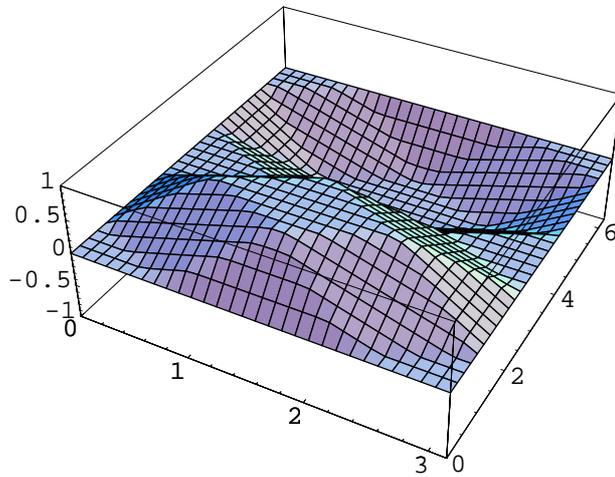
```
Plot3D[Sum[ $\frac{4}{\pi * n^2} * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{2}] * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{8}] * \text{Sin}[n * t] * \text{Sin}[n * x]$ , {n, 1, 100}],
{x, 0,  $\pi$ }, {t, 0,  $2\pi$ }, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 30]
```



- SurfaceGraphics -

(B) $a = \frac{\pi}{2}$ のとき、

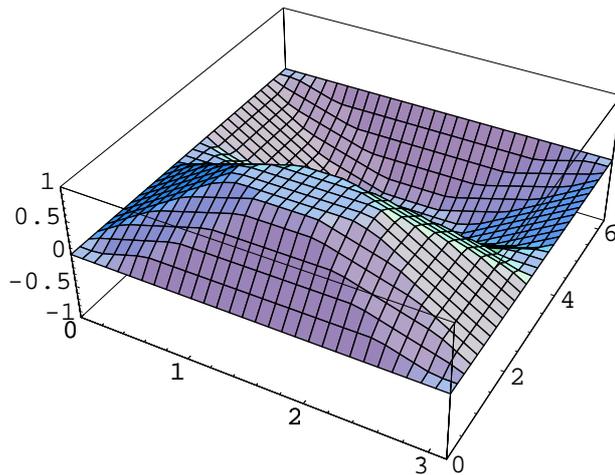
```
Plot3D[Sum[ $\frac{4}{\pi * n^2} * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{2}] * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{4}] * \text{Sin}[n * t] * \text{Sin}[n * x]$ , {n, 1, 100}],  
{x, 0,  $\pi$ }, {t, 0,  $2\pi$ }, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 30]
```



- SurfaceGraphics -

(c) $a = \frac{3\pi}{4}$ のとき、

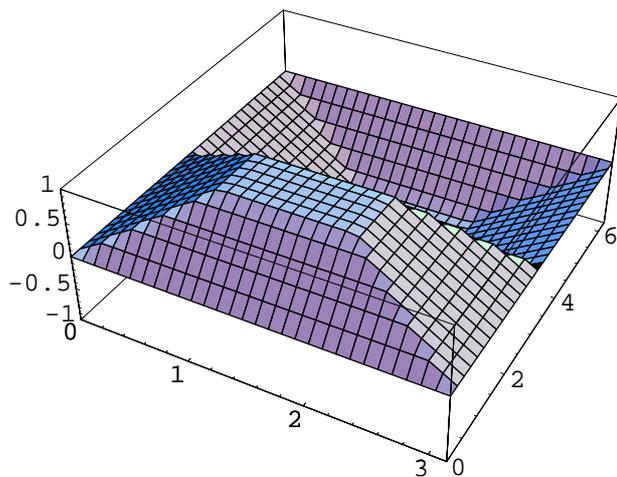
```
Plot3D[Sum[ $\frac{4}{\pi * n^2} * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{2}] * \text{Sin}[\frac{n * 3 \pi}{8}] * \text{Sin}[n * t] * \text{Sin}[n * x]$ , {n, 1, 100}],
{x, 0,  $\pi$ }, {t, 0,  $2\pi$ }, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 30]
```



- SurfaceGraphics -

(D) $a = \pi$ のとき、

```
Plot3D[Sum[ $\frac{4}{\pi * n^2} * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{2}] * \text{Sin}[\frac{n * \pi}{2}] * \text{Sin}[n * t] * \text{Sin}[n * x]$ , {n, 1, 100}],
{x, 0,  $\pi$ }, {t, 0,  $2\pi$ }, PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 30]
```



- SurfaceGraphics -

考察・感想

すべてが単振動をしていることがわかった。

今回の課題は、非常にわかりにくかったが、何とか今回も自分の力で解けて満足した。

しかし大石教授のホームページの答えと

自分の答えが多少違い困惑したが、自分の答えを貫いた。
一生懸命しました。