＝問題＝
長さ 2π のドーナツ状の針金が
$u[x,\ 0] = f[x] = (2\pi - x) * x$
という初期条件を満たすとき
$u[x,\ t]$ をグラフに描け 。 ($t \geq 0$)
(ただし $\kappa = 1$ とする)

```
Clear[f, a, b, u]
f[x_] := (2 π - x) * x;
```

$$a[n\_] := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x]\ \mathrm{Cos}[n*x]\,dx;$$

$$b[n\_] := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x]\ \mathrm{Sin}[n*x]\,dx;$$

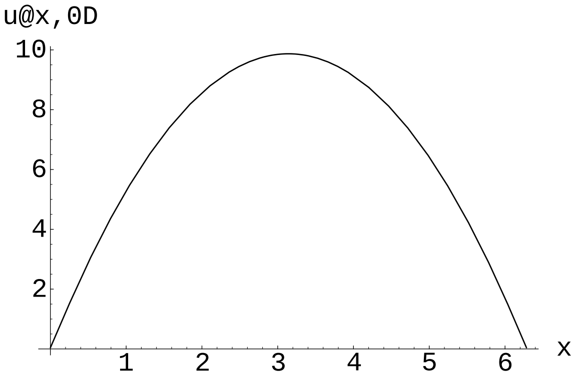
$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x]\,dx;$$

$$u[x\_,\ t\_,\ N\_,\ \kappa\_] := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a[n]*\mathrm{Cos}[n*x] + b[n]*\mathrm{Sin}[n*x])*e^{-\kappa*n^2*t};$$

```
u[x, 0, 100, 1]
```

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi^2}{3} - 4\,\mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Cos}[2x] - \frac{4}{9}\mathrm{Cos}[3x] - \frac{1}{4}\mathrm{Cos}[4x] - \frac{4}{25}\mathrm{Cos}[5x] - \frac{1}{9}\mathrm{Cos}[6x] - \\
&\frac{4}{49}\mathrm{Cos}[7x] - \frac{1}{16}\mathrm{Cos}[8x] - \frac{4}{81}\mathrm{Cos}[9x] - \frac{1}{25}\mathrm{Cos}[10x] - \frac{4}{121}\mathrm{Cos}[11x] - \frac{1}{36}\mathrm{Cos}[12x] - \\
&\frac{4}{169}\mathrm{Cos}[13x] - \frac{1}{49}\mathrm{Cos}[14x] - \frac{4}{225}\mathrm{Cos}[15x] - \frac{1}{64}\mathrm{Cos}[16x] - \frac{4}{289}\mathrm{Cos}[17x] - \\
&\frac{1}{81}\mathrm{Cos}[18x] - \frac{4}{361}\mathrm{Cos}[19x] - \frac{1}{100}\mathrm{Cos}[20x] - \frac{4}{441}\mathrm{Cos}[21x] - \frac{1}{121}\mathrm{Cos}[22x] - \\
&\frac{4}{529}\mathrm{Cos}[23x] - \frac{1}{144}\mathrm{Cos}[24x] - \frac{4}{625}\mathrm{Cos}[25x] - \frac{1}{169}\mathrm{Cos}[26x] - \frac{4}{729}\mathrm{Cos}[27x] - \\
&\frac{1}{196}\mathrm{Cos}[28x] - \frac{4}{841}\mathrm{Cos}[29x] - \frac{1}{225}\mathrm{Cos}[30x] - \frac{4}{961}\mathrm{Cos}[31x] - \frac{1}{256}\mathrm{Cos}[32x] - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[33x]}{1089} - \frac{1}{289}\mathrm{Cos}[34x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[35x]}{1225} - \frac{1}{324}\mathrm{Cos}[36x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[37x]}{1369} - \frac{1}{361}\mathrm{Cos}[38x] - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[39x]}{1521} - \frac{1}{400}\mathrm{Cos}[40x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[41x]}{1681} - \frac{1}{441}\mathrm{Cos}[42x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[43x]}{1849} - \frac{1}{484}\mathrm{Cos}[44x] - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[45x]}{2025} - \frac{1}{529}\mathrm{Cos}[46x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[47x]}{2209} - \frac{1}{576}\mathrm{Cos}[48x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[49x]}{2401} - \\
&\frac{1}{625}\mathrm{Cos}[50x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[51x]}{2601} - \frac{1}{676}\mathrm{Cos}[52x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[53x]}{2809} - \frac{1}{729}\mathrm{Cos}[54x] - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[55x]}{3025} - \frac{1}{784}\mathrm{Cos}[56x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[57x]}{3249} - \frac{1}{841}\mathrm{Cos}[58x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[59x]}{3481} - \\
&\frac{1}{900}\mathrm{Cos}[60x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[61x]}{3721} - \frac{1}{961}\mathrm{Cos}[62x] - \frac{4\,\mathrm{Cos}[63x]}{3969} - \frac{\mathrm{Cos}[64x]}{1024} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[65x]}{4225} - \frac{\mathrm{Cos}[66x]}{1089} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[67x]}{4489} - \frac{\mathrm{Cos}[68x]}{1156} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[69x]}{4761} - \frac{\mathrm{Cos}[70x]}{1225} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[71x]}{5041} - \frac{\mathrm{Cos}[72x]}{1296} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[73x]}{5329} - \frac{\mathrm{Cos}[74x]}{1369} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[75x]}{5625} - \frac{\mathrm{Cos}[76x]}{1444} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[77x]}{5929} - \frac{\mathrm{Cos}[78x]}{1521} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[79x]}{6241} - \frac{\mathrm{Cos}[80x]}{1600} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[81x]}{6561} - \frac{\mathrm{Cos}[82x]}{1681} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[83x]}{6889} - \frac{\mathrm{Cos}[84x]}{1764} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[85x]}{7225} - \frac{\mathrm{Cos}[86x]}{1849} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[87x]}{7569} - \frac{\mathrm{Cos}[88x]}{1936} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[89x]}{7921} - \frac{\mathrm{Cos}[90x]}{2025} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[91x]}{8281} - \frac{\mathrm{Cos}[92x]}{2116} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[93x]}{8649} - \frac{\mathrm{Cos}[94x]}{2209} - \\
&\frac{4\,\mathrm{Cos}[95x]}{9025} - \frac{\mathrm{Cos}[96x]}{2304} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[97x]}{9409} - \frac{\mathrm{Cos}[98x]}{2401} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[99x]}{9801} - \frac{\mathrm{Cos}[100x]}{2500}
\end{aligned}$$

```
Plot[%, {x, 0, 2π}, AxesLabel -> {"x", "u[x,0]"}, PlotRange -> All]
```

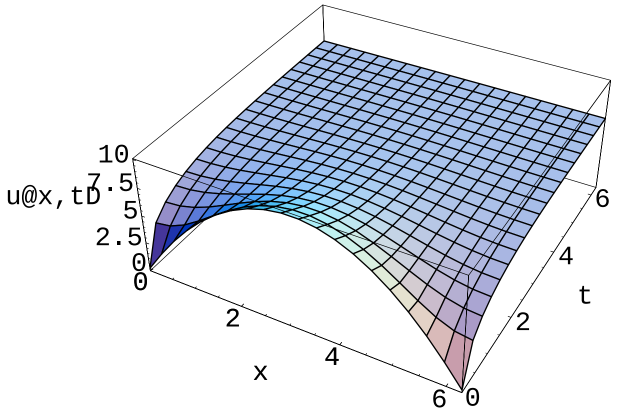


- Graphics -

u[x, t, 100, 1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\pi^2}{3} - 4\,E^{-t}\,\text{Cos}[x] - E^{-4\,t}\,\text{Cos}[2\,x] - \frac{4}{9}\,E^{-9\,t}\,\text{Cos}[3\,x] - \frac{1}{4}\,E^{-16\,t}\,\text{Cos}[4\,x] - \frac{4}{25}\,E^{-25\,t}\,\text{Cos}[5\,x] - \\
&\frac{1}{9}\,E^{-36\,t}\,\text{Cos}[6\,x] - \frac{4}{49}\,E^{-49\,t}\,\text{Cos}[7\,x] - \frac{1}{16}\,E^{-64\,t}\,\text{Cos}[8\,x] - \frac{4}{81}\,E^{-81\,t}\,\text{Cos}[9\,x] - \\
&\frac{1}{25}\,E^{-100\,t}\,\text{Cos}[10\,x] - \frac{4}{121}\,E^{-121\,t}\,\text{Cos}[11\,x] - \frac{1}{36}\,E^{-144\,t}\,\text{Cos}[12\,x] - \frac{4}{169}\,E^{-169\,t}\,\text{Cos}[13\,x] - \\
&\frac{1}{49}\,E^{-196\,t}\,\text{Cos}[14\,x] - \frac{4}{225}\,E^{-225\,t}\,\text{Cos}[15\,x] - \frac{1}{64}\,E^{-256\,t}\,\text{Cos}[16\,x] - \frac{4}{289}\,E^{-289\,t}\,\text{Cos}[17\,x] - \\
&\frac{1}{81}\,E^{-324\,t}\,\text{Cos}[18\,x] - \frac{4}{361}\,E^{-361\,t}\,\text{Cos}[19\,x] - \frac{1}{100}\,E^{-400\,t}\,\text{Cos}[20\,x] - \frac{4}{441}\,E^{-441\,t}\,\text{Cos}[21\,x] - \\
&\frac{1}{121}\,E^{-484\,t}\,\text{Cos}[22\,x] - \frac{4}{529}\,E^{-529\,t}\,\text{Cos}[23\,x] - \frac{1}{144}\,E^{-576\,t}\,\text{Cos}[24\,x] - \frac{4}{625}\,E^{-625\,t}\,\text{Cos}[25\,x] - \\
&\frac{1}{169}\,E^{-676\,t}\,\text{Cos}[26\,x] - \frac{4}{729}\,E^{-729\,t}\,\text{Cos}[27\,x] - \frac{1}{196}\,E^{-784\,t}\,\text{Cos}[28\,x] - \frac{4}{841}\,E^{-841\,t}\,\text{Cos}[29\,x] - \\
&\frac{1}{225}\,E^{-900\,t}\,\text{Cos}[30\,x] - \frac{4}{961}\,E^{-961\,t}\,\text{Cos}[31\,x] - \frac{1}{256}\,E^{-1024\,t}\,\text{Cos}[32\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-1089\,t}\,\text{Cos}[33\,x]}{1089} - \frac{1}{289}\,E^{-1156\,t}\,\text{Cos}[34\,x] - \frac{4\,E^{-1225\,t}\,\text{Cos}[35\,x]}{1225} - \frac{1}{324}\,E^{-1296\,t}\,\text{Cos}[36\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-1369\,t}\,\text{Cos}[37\,x]}{1369} - \frac{1}{361}\,E^{-1444\,t}\,\text{Cos}[38\,x] - \frac{4\,E^{-1521\,t}\,\text{Cos}[39\,x]}{1521} - \frac{1}{400}\,E^{-1600\,t}\,\text{Cos}[40\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-1681\,t}\,\text{Cos}[41\,x]}{1681} - \frac{1}{441}\,E^{-1764\,t}\,\text{Cos}[42\,x] - \frac{4\,E^{-1849\,t}\,\text{Cos}[43\,x]}{1849} - \frac{1}{484}\,E^{-1936\,t}\,\text{Cos}[44\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-2025\,t}\,\text{Cos}[45\,x]}{2025} - \frac{1}{529}\,E^{-2116\,t}\,\text{Cos}[46\,x] - \frac{4\,E^{-2209\,t}\,\text{Cos}[47\,x]}{2209} - \frac{1}{576}\,E^{-2304\,t}\,\text{Cos}[48\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-2401\,t}\,\text{Cos}[49\,x]}{2401} - \frac{1}{625}\,E^{-2500\,t}\,\text{Cos}[50\,x] - \frac{4\,E^{-2601\,t}\,\text{Cos}[51\,x]}{2601} - \frac{1}{676}\,E^{-2704\,t}\,\text{Cos}[52\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-2809\,t}\,\text{Cos}[53\,x]}{2809} - \frac{1}{729}\,E^{-2916\,t}\,\text{Cos}[54\,x] - \frac{4\,E^{-3025\,t}\,\text{Cos}[55\,x]}{3025} - \frac{1}{784}\,E^{-3136\,t}\,\text{Cos}[56\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-3249\,t}\,\text{Cos}[57\,x]}{3249} - \frac{1}{841}\,E^{-3364\,t}\,\text{Cos}[58\,x] - \frac{4\,E^{-3481\,t}\,\text{Cos}[59\,x]}{3481} - \frac{1}{900}\,E^{-3600\,t}\,\text{Cos}[60\,x] - \\
&\frac{4\,E^{-3721\,t}\,\text{Cos}[61\,x]}{3721} - \frac{1}{961}\,E^{-3844\,t}\,\text{Cos}[62\,x] - \frac{4\,E^{-3969\,t}\,\text{Cos}[63\,x]}{3969} - \frac{E^{-4096\,t}\,\text{Cos}[64\,x]}{1024} - \\
&\frac{4\,E^{-4225\,t}\,\text{Cos}[65\,x]}{4225} - \frac{E^{-4356\,t}\,\text{Cos}[66\,x]}{1089} - \frac{4\,E^{-4489\,t}\,\text{Cos}[67\,x]}{4489} - \frac{E^{-4624\,t}\,\text{Cos}[68\,x]}{1156} - \\
&\frac{4\,E^{-4761\,t}\,\text{Cos}[69\,x]}{4761} - \frac{E^{-4900\,t}\,\text{Cos}[70\,x]}{1225} - \frac{4\,E^{-5041\,t}\,\text{Cos}[71\,x]}{5041} - \frac{E^{-5184\,t}\,\text{Cos}[72\,x]}{1296} - \\
&\frac{4\,E^{-5329\,t}\,\text{Cos}[73\,x]}{5329} - \frac{E^{-5476\,t}\,\text{Cos}[74\,x]}{1369} - \frac{4\,E^{-5625\,t}\,\text{Cos}[75\,x]}{5625} - \frac{E^{-5776\,t}\,\text{Cos}[76\,x]}{1444} - \\
&\frac{4\,E^{-5929\,t}\,\text{Cos}[77\,x]}{5929} - \frac{E^{-6084\,t}\,\text{Cos}[78\,x]}{1521} - \frac{4\,E^{-6241\,t}\,\text{Cos}[79\,x]}{6241} - \frac{E^{-6400\,t}\,\text{Cos}[80\,x]}{1600} - \\
&\frac{4\,E^{-6561\,t}\,\text{Cos}[81\,x]}{6561} - \frac{E^{-6724\,t}\,\text{Cos}[82\,x]}{1681} - \frac{4\,E^{-6889\,t}\,\text{Cos}[83\,x]}{6889} - \frac{E^{-7056\,t}\,\text{Cos}[84\,x]}{1764} - \\
&\frac{4\,E^{-7225\,t}\,\text{Cos}[85\,x]}{7225} - \frac{E^{-7396\,t}\,\text{Cos}[86\,x]}{1849} - \frac{4\,E^{-7569\,t}\,\text{Cos}[87\,x]}{7569} - \frac{E^{-7744\,t}\,\text{Cos}[88\,x]}{1936} - \\
&\frac{4\,E^{-7921\,t}\,\text{Cos}[89\,x]}{7921} - \frac{E^{-8100\,t}\,\text{Cos}[90\,x]}{2025} - \frac{4\,E^{-8281\,t}\,\text{Cos}[91\,x]}{8281} - \frac{E^{-8464\,t}\,\text{Cos}[92\,x]}{2116} - \\
&\frac{4\,E^{-8649\,t}\,\text{Cos}[93\,x]}{8649} - \frac{E^{-8836\,t}\,\text{Cos}[94\,x]}{2209} - \frac{4\,E^{-9025\,t}\,\text{Cos}[95\,x]}{9025} - \frac{E^{-9216\,t}\,\text{Cos}[96\,x]}{2304} - \\
&\frac{4\,E^{-9409\,t}\,\text{Cos}[97\,x]}{9409} - \frac{E^{-9604\,t}\,\text{Cos}[98\,x]}{2401} - \frac{4\,E^{-9801\,t}\,\text{Cos}[99\,x]}{9801} - \frac{E^{-10000\,t}\,\text{Cos}[100\,x]}{2500}
\end{aligned}
$$

```
Plot3D[%, {x, 0, 2π}, {t, 0, 2π}, AxesLabel -> {"x", "t", "u[x,t]"},
 PlotRange -> All, PlotPoints -> 20]
```



- SurfaceGraphics -

＝考察＝

ドーナツ状の針金　（長さ2 π）

u[x, t = 0] （初期条件） が与えられた 。

境界条件は

u[0, t] = u[2π, 0] になる。

変数分離法により

u[x, t] = X[x] T[t] とおける 。

これを熱方程式に代入すると

$X[x]\ \frac{dT[t]}{dt} = \kappa T[t]\ \frac{d^2 X[x]}{dx^2}$ **（κ： 熱定数） が得られる 。**

両辺を κX[x] T[t] で割ると

$\frac{1}{\kappa T[t]}\ \frac{dT[t]}{dt} = \frac{1}{X[x]}\ \frac{d^2 X[x]}{dx^2}$ **となり**

この値を定数 kとおき 、 境界条件から得られる X[0] = X[2π] の下で解く

$X[x] = A * Cos[p_n * x] + b * Sin[p_n * x]$ とおき 、

$k_n = -p_n^2$ （$p_n = n$） として 、

$X[x] = A * Cos[n * x] + b * Sin[n * x]$

$T[t] = C e^{-\kappa * p_n^2 * t}$ が得られる 。

よって

$u[x, t] = (A_n * Cos[n * x] + B_n * Sin[n * x]) * e^{-\kappa * n^2 * t}$ となる。

これが特殊解である 。

次に一般解を求める 。

$\frac{a_0}{2} = A_0$

$a_n = A_n$

$b_n = B_n$

とする。

ここで

"u_1とu_2が熱方程式と境界条件の解なら 、その線形結合

$u=\alpha u_1+\beta u_2$ （$\alpha, \beta \in R$）も同じく解である "

という 「重ね合わせの原理 」 を使うと

$u[x, t] = u_0[x, t] + \sum_{n=1}^{\infty} u_n[x, t]$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n * \mathrm{Cos}[n*x] + b_n * \mathrm{Sin}[n*x]) * e^{-\kappa*n^2*t}$$

が求まる 。 これが一般解である 。

$$u[x, t=0] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n * \mathrm{Cos}[n*x] + b_n * \mathrm{Sin}[n*x]) = f[x]$$

とすると 、 フーリエ級数展開ができるので 、

$$a[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[x]\, \mathrm{Cos}[n*x]\, dx;$$

$$b[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[x]\, \mathrm{Sin}[n*x]\, dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[x]\, dx;$$

として求めることができる 。

$t = 0$ のときのグラフを $n = 100$ として描いてみた 。
長さのちょうど半分 $(x = \pi)$ のところが最も温度が高くなるが 、
$(x, t, u[x, t])$ の３次元のグラフを $n = 100$ で書くと 、
$x = \pi$で最も高い値をとるのは確かだが 、
時間とともに均一な温度に近づいていく様子がよくわかる 。