情報系の物理学レポート

学籍番号:g99p0417
氏名:川口克則

出題日:2000/10/4
提出期限日:2000/10/18
提出日:2000/10/18

1　問題

次の関数のフーリエ級数展開を求め図に示せ

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \quad (N = 0, 1, 2, ...)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

(1) $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ を $f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張したもの

(2) $f(x) = \{1 \quad (0 \leq x < \pi)\ ,\ 0 \quad (\pi \leq x < 2\pi)\}$ を $f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張したもの

2　解答

(1) $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ より、

$$\int_0^{2\pi}|x|Cos[Nx]dx = \int_0^{\pi}(x)Cos[Nx]dx + \int_{-\pi}^{0}(-x)Cos[Nx]dx$$

となる。

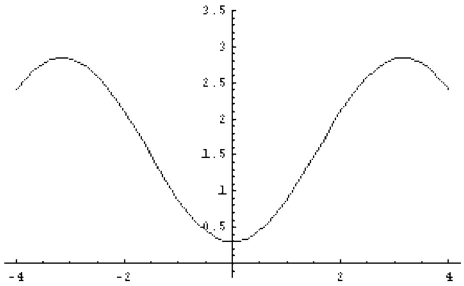
Mathematica への入力

$$g[N\_] := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x)*Cos[N*x]dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)*Cos[N*x]dx$$
$$h[N\_] := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x)*Sin[N*x]dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)*Sin[N*x]dx$$
$$f[x\_, N\_] := \frac{g[0]}{2} + \sum_{n=1}^{N}(g[n]*Cos[n*x] + h[n]*Sin[n*x])$$

N = 1 のとき

In := $f[x,1]$ Out := $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4Cos[x]}{\pi}$

Plot[f[x,1],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,3.5}]



N = 2 のとき

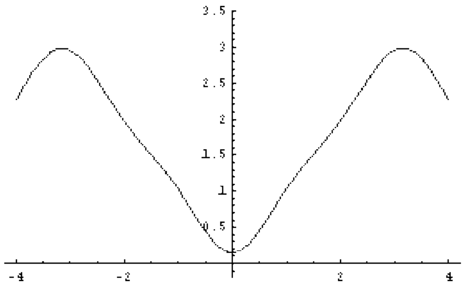
In := $f[x,2]$ Out := $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4Cos[x]}{\pi}$

グラフは f[x,1] のときと同じ。

N = 3 のとき

In := $f[x,3]$ Out := $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4Cos[x]}{\pi} - \dfrac{4Cos[3x]}{9\pi}$

Plot[f[x,3],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,3.5}]

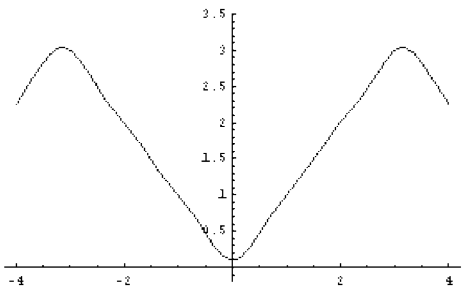


N = 5 のとき

In := $f[x,5]$

Out := $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4Cos[x]}{\pi} - \dfrac{4Cos[3x]}{9\pi} - \dfrac{4Cos[5x]}{25\pi}$

Plot[f[x,5],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,3.5}]

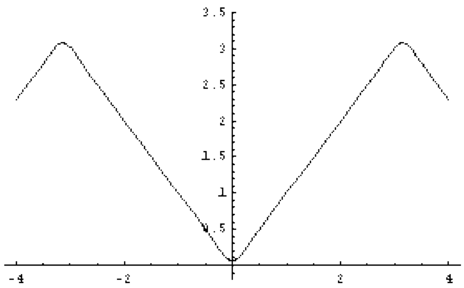


N = 10 のとき

In := $f[x,5]$

Out := $\frac{\pi}{2}-\frac{4Cos[x]}{\pi}-\frac{4Cos[3x]}{9\pi}-\frac{4Cos[5x]}{25\pi}-\frac{4Cos[7x]}{49\pi}-\frac{4Cos[9x]}{81\pi}$

Plot[f[x,10],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,3.5}]

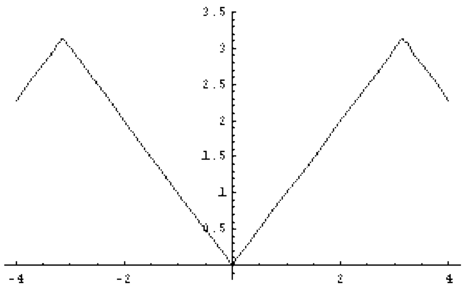


N = 100 のとき

In := $f[x,100]$

Out := $\frac{\pi}{2}-\frac{4Cos[x]}{\pi}-\frac{4Cos[3x]}{9\pi}-\frac{4Cos[5x]}{25\pi}-\sim-\frac{4Cos[95x]}{9025\pi}-\frac{4Cos[97x]}{9409\pi}-\frac{4Cos[99x]}{9801\pi}$

Plot[f[x,100],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,3.5}]



また、一般解は、

$$f(x,N)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{(N+1)/2}\left(\frac{4\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2\pi}\right)$$

となる。

(2) $f(x) = \{1 \quad (0 \le x < \pi)\ ,\ 0 \quad (\pi \le x < 2\pi)\}$ より、

$$\int_0^{2\pi} f(x)Cos[Nx]dx = \int_0^{\pi}(1)Cos[Nx]dx$$

となる。

Mathematica への入力

$i[N\_] := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1) * Cos[N * x]dx$

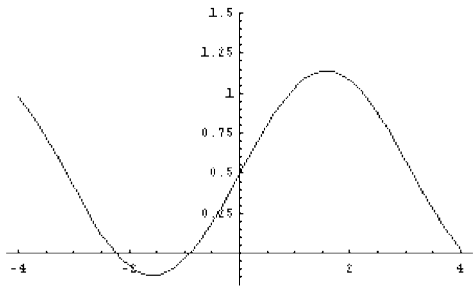
$j[N\_] := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1) * Sin[N * x]dx$

$k[x\_, N\_] := \dfrac{i[0]}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(i[n] * Cos[n * x] + j[n] * Sin[n * x])$

N = 1 のとき

In := $k[x, 1]$ Out := $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2Sin[x]}{\pi}$

Plot[k[x,1],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,1.5}]



N = 2 のとき

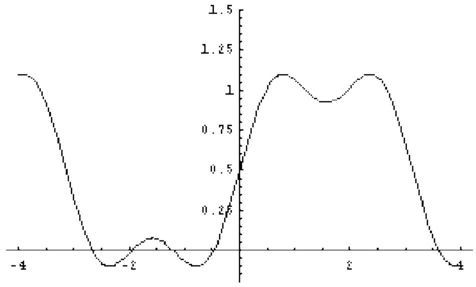
In := $k[x, 2]$ Out := $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2Sin[x]}{\pi}$

グラフは f[x,1] のときと同じ。

N = 3 のとき

In := $k[x,3]$ Out := $\frac{1}{2}+\frac{2Sin[x]}{\pi}+\frac{2Sin[3x]}{3\pi}$

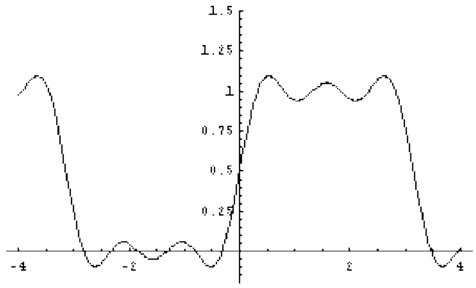
Plot[k[x,3],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,1.5}]



N = 5 のとき

In := $k[x,5]$ Out := $\frac{1}{2}+\frac{2Sin[x]}{\pi}+\frac{2Sin[3x]}{3\pi}+\frac{2Sin[5x]}{5\pi}$

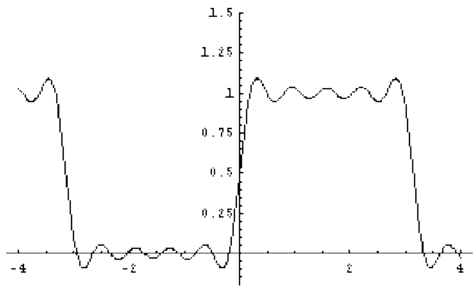
Plot[k[x,5],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,1.5}]



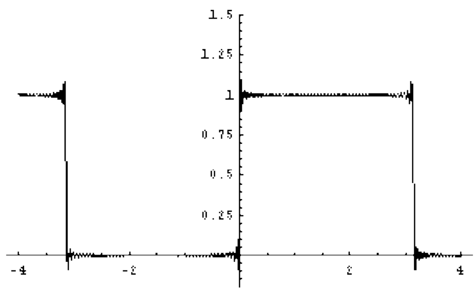
N = 10 のとき

In := $k[x,5]$ Out := $\frac{1}{2}+\frac{2Sin[x]}{\pi}+\frac{2Sin[3x]}{3\pi}+\frac{2Sin[5x]}{5\pi}+\frac{2Sin[7x]}{7\pi}+\frac{2Sin[9x]}{9\pi}$

Plot[k[x,10],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,1.5}]



N = 100 のとき
In := $k[x, 100]$
Out := $\frac{1}{2}+\frac{2Sin[x]}{\pi}+\frac{2Sin[3x]}{3\pi}+\frac{2Sin[5x]}{5\pi}+\sim+\frac{2Sin[95x]}{95\pi}+\frac{2Sin[97x]}{97\pi}+\frac{2Sin[99x]}{99\pi}$
Plot[k[x,100],{x,-4,4},PlotRange->{-0.2,1.5}]



また、一般解は、

$$f(x,N)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{(N+1)/2}\left(\frac{2\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}\right)$$

となる。

3 考察、感想

ちゃんと授業で説明したグラフになった。
フーリエ変換の式自体は理解していたが、Mathematica に慣れていなかったので、レポートを完成させるのに時間がかかった。
物理はいまいち好きではないが、がんばって勉強したい。