

# 情報系の物理学レポート 第3回

g99p1457 矢島伸吾

出題日：2000年10月25日(水)

提出日：2000年11月6日(月)

提出期限：2000年11月8日(水)

## 1 問題

長さ  $\pi$  の弦の中心の一部 (幅  $a < \pi$ ) を  $t = 0$  で叩いたとする。  $t = 0$  で

$$u(x, 0) = f(x) = 0$$
$$\frac{\delta u}{\delta t}(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{\pi-a}{2}) \\ 1 & (\frac{\pi-a}{2} \leq x \leq \frac{\pi+a}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi+a}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

とした時の  $u(x, t)$  の変化を  $t = 0$  で解析して図示せよ。

## 2 問題の解析

まず、具体的に図示するために、 $a = \frac{\pi}{2}$  と定める。

波動方程式  $\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0$  の一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) \sin p_n x$$
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$
$$B_n = \frac{2}{L p_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$
$$(L = \pi(\text{弦の長さ}), p_n = \frac{n\pi}{L} = n)$$

で表される。よって、 $A_n, B_n$  は、

$$A_n = 0 \quad (f(x) = 0 \text{ より})$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_{\frac{\pi-a}{2}}^{\frac{\pi+a}{2}} 1 \sin nx dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin nx dx
\end{aligned}$$

となる。これを  $u(x, t)$  の式に代入したものを図示すれば良い。

### 3 Mathematica によるグラフ

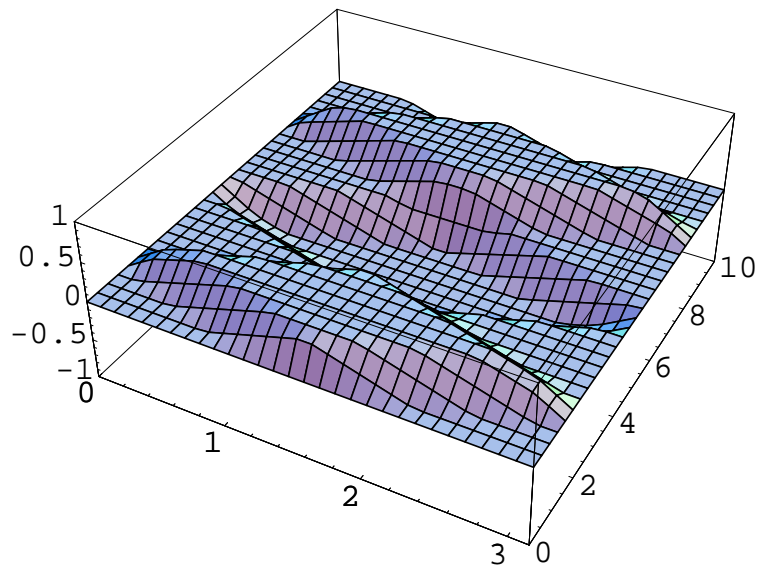
入力：

```

a = Pi/4
bn = Simplify[2/(n*Pi)*Integrate[Sin[n*x],
  {x, (Pi - a)/2, (Pi + a)/2}]]
Plot3D[Sum[Sin[n*x]*bn*Sin[n*t], {n, 100}], {x, 0, Pi}, {t, 0, 10},
  PlotRange -> {-1, 1}, PlotPoints -> 30]

```

結果のグラフ：



### 4 考察

図のように、まず上方向に力を受けた部分が盛り上がり、だんだんと端の方に動きが伝わって行っている。高さは一定以上まで上がらず、高くなってい

る部分の範囲が広がって行っている。端まで伝わると、同じ動きで弦が元の位置まで戻り、今度は下向きに同じように動いていく。

グラフを書くまで、弦は綺麗な弧を描いて振動するものだと思っていたので、このグラフが信じられなかった。よって、この波動方程式が本当に弦の動きを表していることを確かめるために、初期値  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 0$  を与えてグラフを作成した。

ここで  $A_n$  は、正弦関数の直交関係より

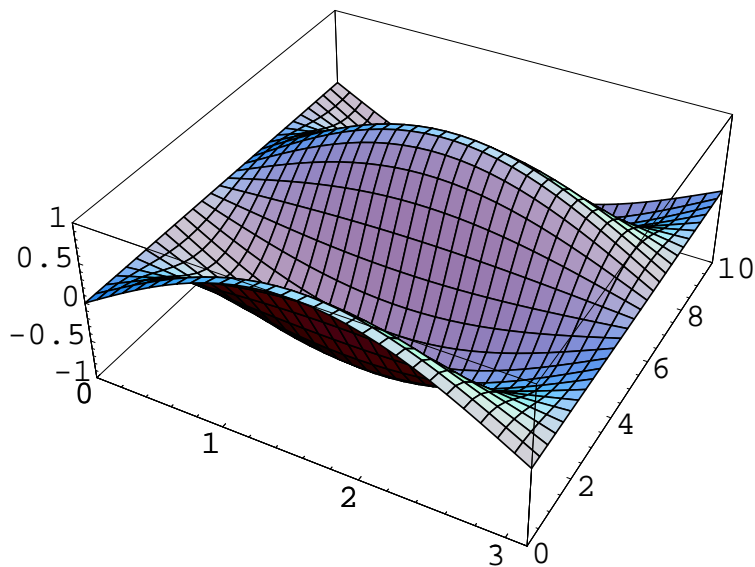
$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \neq 1) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = 1 & (n = 1) \end{cases}$$

となる。以下にそのグラフを示す。入力：

```
a1 = 1
Plot3D[Sin[x]*a1*Cos[t], {x, 0, Pi}, {t, 0, 10},
  PlotRange -> {-2, 2}, {PlotPoints -> 30}]
```

結果のグラフ：



このように、初期値が綺麗な正弦波の形をしている場合には、弧を描いて振動する様子がグラフに出力される。

なぜ問題のグラフはピアノの弦のように弧を描かないのか疑問に感じたので、機会があれば調べてみたい。