情報系の物理学 レポート 第5回

G99P057-3 斎藤卓也

出題日:　2000-11-15
提出期限:2000-11-29
提出日:　2000-11-23

1　演習問題5

図1において、

$$\lim_{Q\to P}\frac{QR}{QT^2}$$

がSPによらない定数となることを示せ。

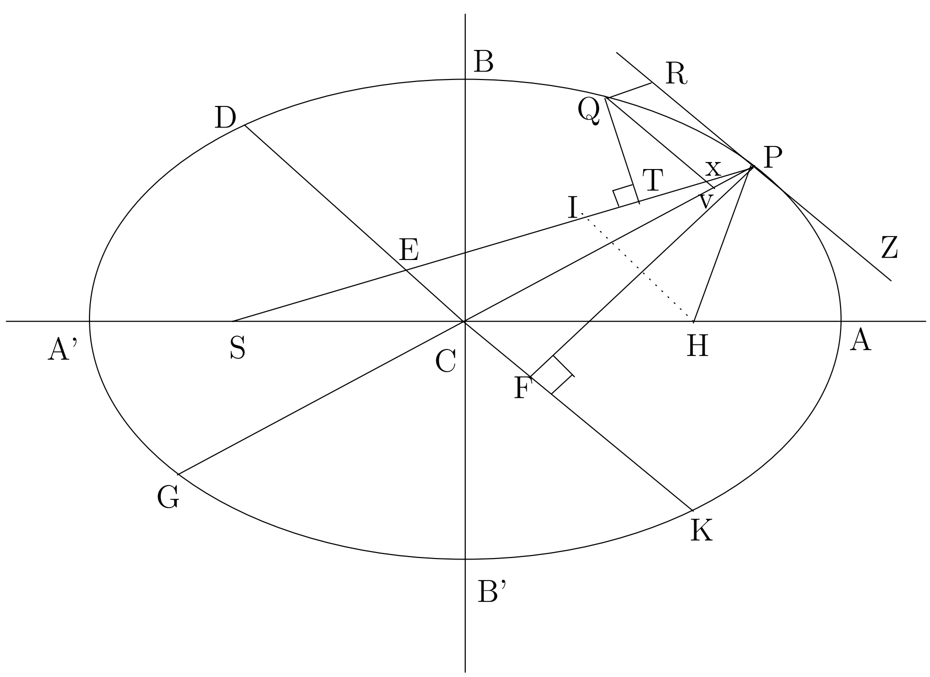

図 1: 演習5の図

2　演習５の解答

図１より、点Pを通る曲線は S と H を焦点とする楕円である。RPZ // EC // IH となるように、点 I,E をとる。このとき、図より $CS = CH$ であることが分かる。また、三角形 SEC と三角形 SIH が相似であることより、$ES = EI$ であることが分かる。

$EP = PI + EI$ で、$PS = SE + EI + PI = PI + 2EI$ となることから、$PS + PI = 2(PI + EI) = 2EP$ となることが分かる。

IH // RPZ より、角 IHP=角 HPZ、角 RPI=角 HIP を得る。

楕円の性質より、角 HPZ=角 IPR が成り立つ。よって、角 IHP=角 HIP であることが分かる。このことから、△PIH は２等辺三角形であることが分かる。従って、$PI = PH$ が成立する。これから、$EP = (PS + PH)/2$ となる。

楕円の定義から、$PS + PH = 2AC$ となる。よって、$EP = AC$ になる。

点 x, v をそれぞれ線分 PS, PC 上に線分 Qxv // RPZ となるようにとる。$\triangle PCE$ と $\triangle Pvx$ は相似であるから、$Px : Pv = PE : PC$ となる。一方、$RQxP$ は平行四辺形となるから、RQ=Px である。よって、$EP = AC$ と合わせて

$$\frac{RQ}{Pv} = \frac{AC}{PC} \tag{1}$$

を得る。

次に、PG 上の任意の点 V を取り、RPZ に平行な線分 VX を引く。ただし、X は楕円上の点とする。このとき、

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = \text{一定} \tag{2}$$

が成り立つ。ここで、VX として vQ の場合と CD の場合を考えれば、

$$\frac{Gv \times Pv}{Qv^2} = \frac{Pc^2}{CD^2} \tag{3}$$

が成り立つことが分かる。すなわち、

$$\frac{1}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}\frac{1}{Gv \times Pv} \tag{4}$$

を得る。

ここで、DK に対して P から垂線を降ろし、その足を F とする。角 QxE=角 PEF であるから、$\triangle QTx$ と $\triangle PFE$ は相似となる。したがって、$Qx : QT = PE : PF$ となる。したがって、$PE = AC$ より、

$$\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{PE^2}{PF^2} = \frac{AC^2}{PF^2} \tag{5}$$

となる。Q が P に非常に近いとき、Qx は Qv に非常に近くなるから、この条件のもとでは

$$\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2} \tag{6}$$

と考えてよい。これから、

$$\frac{1}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}\frac{1}{Qv^2} \tag{7}$$

を得る。

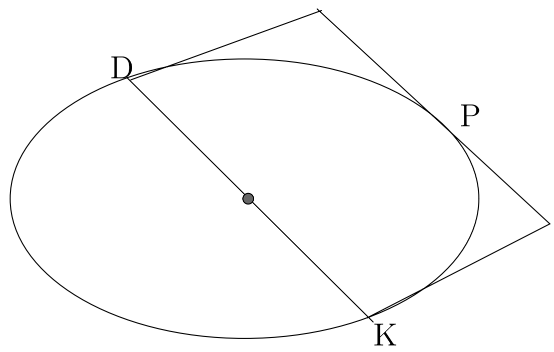

図 2: 楕円の性質

さらに、楕円では、図 2 のように任意の対角線と図のような 3 本の接線で囲まれた平行四辺形の面積は、どのような対角線をとっても等しくなることが知られている。これを、対角線 DK と対角線 AA' に適用すると、

$$2CD \times PF = 2AC \times BC \tag{8}$$

を得る。従って、

$$\frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{BC^2} \tag{9}$$

が成り立つことが分かる。

ここで、$L = 2CB^2/AC$ とする。式 (7) から

$$\frac{L \times QR}{QT^2} = \frac{2CB^2}{AC}QR\frac{AC^2}{PF^2}\frac{1}{Qv^2} \tag{10}$$

となる。式 (4), 式 (9) と式 (1) とから、上式は

$$\begin{aligned}
\frac{L \times QR}{QT^2} &= \frac{2CB^2}{AC}QR\frac{CD^2}{BC^2}\frac{PC^2}{CB^2}\frac{1}{Gv \times Pv} && (11)\\
&= \frac{2}{AC} = QR \cdot PC^2\frac{1}{Gv \times Pv} && (12)\\
&= \frac{2}{AC}\frac{AC}{PC}PC^2\frac{1}{Gv} && (13)\\
&= \frac{2PC}{Gv} && (14)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$Q \to P$ のとき、L は一定で $Gv \to 2PC$ となるので、

$$\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT^2} = \frac{1}{L} \tag{15}$$

$$= \frac{AC}{2CB^2} \tag{16}$$

となることが分かる。

これより、与式は SP によらない定数になっている。

（証明終わり）

3　演習問題５’

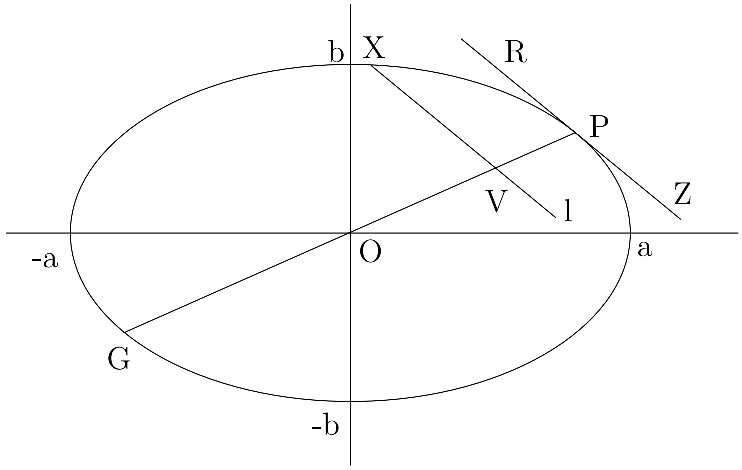

図 3: 演習５’の図

　楕円を考える。楕円上の点 P の接線を ZPR とする。
　他に楕円上の点 Z を取り、RPZ に平行な直線 l を引く。
　楕円の中心を O として、PO を延長して楕円と交わる点を G とする。また、V を l と POG の交点とする。このとき、X の取り方によらず、ある変数 k が存在して

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = k \qquad (X\text{によらず一定})$$

となることを示せ。

4　演習問題５’の解答

点 $P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, 点 $X(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ とおく。
点 P における接線は、楕円の接線の公式より、

$$\frac{a\cos\alpha\cdot x}{a^2}+\frac{b\sin\alpha\cdot y}{b^2}=1 \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=1 \tag{18}$$

となる。これに平行な直線は

$$\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=g \tag{19}$$

と書ける。式 (19) が点 X を通る直線であるとき、(x,y) に点 X の座標を代入して

$$\frac{\cos\alpha}{a}a\cos\beta+\frac{\sin\alpha}{b}b\sin\beta=g \tag{20}$$
$$\Leftrightarrow\quad g=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{21}$$

よって、点 X を通り、点 P での接線と平行な直線 XV の方程式は、

$$\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{22}$$

である。
また、直線 OP の方程式は

$$y=\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha}x \tag{23}$$

である。
次に、点Vの座標を求める。式 (23) を式 (22) に代入して、

$$\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}\times\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha}x=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{24}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{a\cos\alpha}x=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow\quad x=a\cos\alpha(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \tag{26}$$

同様にして、

$$y=b\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \tag{27}$$

以上より、点 V の座標は、

$$V(a\cos\alpha(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),\ b\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta))$$

であることが求められる。

次に、

$$
\begin{aligned}
PV \times GV &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OV}| \times |\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OV}| \\
&= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OV}| \times |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OV}| \\
&= |\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OV}|^2 \\
&= (a^2 \cos^2 \alpha + (b^2 \sin^2 \alpha(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
&= (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) \left\{ 1 - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 \right\}
\end{aligned}
$$

が得られる。

また、

$$
\begin{aligned}
XV^2 &= |\overrightarrow{XV}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OV}|^2 \\
&= |\overrightarrow{OX}|^2 - 2\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OV} + |\overrightarrow{OV}|^2 \\
&= (a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta) \\
&\quad -2(a^2 \cos \beta \cos \alpha + b^2 \sin \beta \sin \alpha)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
&\quad +(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2
\end{aligned}
$$

となる。

上の結果を

$$\frac{GV \times PV}{XV^2}$$

に代入して、分母，分子を展開して整理すると、

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = \frac{a^2 + b^2 - (b-a)(b+a)\cos 2\alpha}{a^2 + b^2 + (b-a)(b+a)\cos 2\alpha} \tag{28}$$

となる。

これは、

$$\frac{GV \times PV}{XV^2}$$

の値が、β によらず一定であることを示している。つまり、点 X が楕円上のどの位置にあっても、式 (28) の値は一定になる。

（証明終わり）

5　考察・感想

演習５については、自分で解答を作ることが出来なかったため、大石先生の著書「微積分とモデリングの数理」を参考にして、解答を作りました。

演習５　’の方は、図形の性質から処理した解答と、直線OP上の点Ｖの座標を設定して解く解答が既にホームページに掲載されていたため、私の場合は点Xを$X(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$というようにパラメータ表示して解く解答を作りました。

また、楕円の接線の公式を使ったり、$PV \times GV$やXV^2の値もベクトルを使うなどして、なるべく簡潔で分かりやすい解答になるように工夫しました。