情報系の物理学 レポート 第6回

G99P057-3 斎藤卓也

出題日:　2000-11-22
提出期限:2000-12-06
提出日:　2000-11-27

1　演習問題6

$|x_1, \cdots, x_n>,\ |y_1, \cdots, y_n>$ なら

$$< x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n > = < x_1 \mid y_1 > \cdots < x_n \mid y_n >$$

となることを示せ。

2　解答

まず、$\boldsymbol{C}^2$ の n 個のベクトル

$$|x_i >= x_{i0}|0> + x_{i1}|1>, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

のテンソル積 $|x_1, \cdots, x_n>$ は

$$|x_1, \cdots, x_n >= \sum_{i_1, \cdots i_n = 0}^{1} (x_{1,i_1} \cdots x_{n,i_n}) |i_1, \cdots, i_n> \tag{2}$$

で与えられることを証明する。

2.1　証明

$|i_1>, \cdots, |i_n> (i_1, \cdots, i_n = 0, 1)$ が $|i_k >= \delta_{i_k,0}|0> + \delta_{i_k,1}|1>, \quad k = 1, \cdots, n$ と書けので、テンソル積の定義より、$|i_1, \cdots, i_n>$ はその第 $j := 2^{n-1}j_1 + 2^{n-2}j_2 + \cdots + j_n$ $(j_1, \cdots, j_n = 0, 1)$ 成分が $\delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_n,j_n}$ であるような列ベクトルである。すなわち、第 $i = 2^{n-1}i_1 + 2^{n-2}i_2 + \cdots + i_n$ 成分が 1 で、残りの成分が全て 0 であるような列ベクトルである。

　したがって、式 (2) の右辺のベクトルの第 $i := 2^{n-1}i_1+2^{n-2}i_2+\cdots+i_n$ $(i_1,\cdots,i_n = 0,1)$ 成分は、$x_{1,i_1}\cdots x_{n,i_n}$ である。このことは、テンソル積の定義によれば、式 (2) の右辺が $|x_1>,\cdots,|x_n>$ のテンソル積 $|x_1,\cdots,x_n>$ であることを示している。

3　本題の証明

$$
\begin{aligned}
|x_k> &= x_{k0}> + x_{k1}|1> && (3)\\
|y_k> &= y_{k0}> + y_{k1}|1> && (4)\\
k &= 1,\cdots,n && (5)
\end{aligned}
$$

とおくと、上で証明した式 (2) より

$$
\begin{aligned}
|x_1,\cdots,x_n> &= \sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{1}(x_{1,i_1}\cdots x_{n,i_n})|i_1,\cdots,i_n> && (6)\\
|y_1,\cdots,y_n> &= \sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{1}(y_{1,i_1}\cdots y_{n,i_n})|i_1,\cdots,i_n> && (7)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

　これに、内積の定義を用いると、

$$
\begin{aligned}
<x_1,\cdots,x_n|y_1,\cdots,y_n> &= \sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{1}(x_{1,i_1}\cdots x_{n,i_n})^*(y_{1,i_1}\cdots y_{n,i_n}) && (8)\\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{1}x^*_{1,i_1}\cdots x^*_{n,i_n}y_{1,i_1}\cdots y_{n,i_n} && (9)\\
&= \left(\sum_{i_1=0}^{1}x^*_{1,i_1}y_{1,i_1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=0}^{1}x^*_{n,i_n}y_{n,i_n}\right) && (10)\\
&= <x_1|y_1>\cdots<x_n|y_n> && (11)
\end{aligned}
$$

　（証明終わり）