# 情報系の物理学 第5回課題

g99p093-7 友成 秀俊

2000 年 11 月 18 日

## 1 問題の内容

座標平面上に、原点 O を中心とする楕円がある。この楕円上に点 P を取り、点 P における接線の方程式をmとする。また、直線 OP と楕円との交点のうち、点 P ではない方を点 G とする。また、楕円上に点 P とは無関係な点 X をとり点 X を通って直線 m に平行な直線を $l$ とし、直線 $l$ と直線 OP との交点を V とする。このとき、$\frac{PV \cdot GV}{XV^2}$ が X の取り方によらず一定となることを証明せよ。

## 2 問題の解析

楕円のパラメーター表示を利用して、座標を使って解いてみる。

## 3 解答・解説

（証明）

点 $X$ と点 $V$ は互いに一意的に決まると言ってもよいので

$X$ の取り方によらず一定 $\Longleftrightarrow$ $V$ の取り方によらず一定

よって、$V$ の取り方によらず $\quad \dfrac{PV \cdot GV}{XV^2} \quad$ が一定となることを示す。

$$\text{楕円の方程式を} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0) \qquad \text{とおく。} \tag{1}$$

$a > b > 0$ としても一般性は失われない。

$P(a\cos\theta, b\sin\theta), G(-a\cos\theta, -b\sin\theta) \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$ とおけ、

直線 $PG$ の方程式は $y = \dfrac{b}{a}\tan\theta \cdot x$ と表せる。

よって、点 $V$ が直線 $PG$ 上の点なので $V(\alpha,\beta)$ とすると、$\beta=\dfrac{b}{a}\tan\theta\cdot\alpha$である

次に、点Pにおける接線 $m$ の方程式の傾きを求める。

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta \qquad \text{だから} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} \qquad \text{を用いて}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a\tan\theta}$$

よって、直線 $l$ の方程式は

$$y-\frac{b}{a}\tan\theta\cdot\alpha=-\frac{b}{a\tan\theta}(x-\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow y=-\frac{b}{a\tan\theta}x+\frac{b}{a}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)\alpha$$

$$\Longleftrightarrow y=-\frac{b}{a\tan\theta}x+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\alpha \tag{2}$$

(1), (2) より点 $X(x_1,y_1)$ を求める

まず、(2) より、両辺２乗して

$$y^2=\frac{b^2}{a^2\tan^2\theta}-2\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\alpha x+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\alpha^2$$

$$\Longleftrightarrow y^2=\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}x^2-\frac{2b^2\alpha x}{a^2\sin^2\theta}+\frac{b^2\alpha^2}{a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

これを (1) に代入すると

$$\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)x^2-\frac{2\alpha x}{a^2\sin^2\theta}+\frac{\alpha^2}{a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}=1$$

$$\frac{1}{a^2\sin^2\theta}x^2-\frac{2\alpha x}{a^2\sin^2\theta}+\frac{\alpha^2}{a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}=1$$

整理して

$$x^2-2\alpha x+\frac{\alpha^2}{\cos^2\theta}-a^2\sin^2\theta=0 \tag{3}$$

この $x$ についての 2 次方程式を解けばよい。

$$(3) \Longleftrightarrow (x-\alpha)^2 = \alpha^2\left(1-\frac{1}{\cos^2\theta}\right) + a^2\sin^2\theta$$

$$\text{ゆえに} \qquad x = \alpha \pm \sqrt{a^2\sin^2\theta - \alpha^2\tan^2\theta}$$

これを (2) に代入すると

$$y = -\frac{b}{a\tan\theta}(\alpha \pm \sqrt{a^2\sin^2\theta - \alpha^2\tan^2\theta}) + \frac{b\alpha}{a\cos\theta\sin\theta}$$

よって、求める点 $X(x_1, y_1)$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \pm \sqrt{a^2\sin^2\theta - \alpha^2\tan^2\theta} \\ -\frac{b}{a\tan\theta}(\alpha \pm \sqrt{a^2\sin^2\theta - \alpha^2\tan^2\theta}) + \frac{b\alpha}{a\cos\theta\sin\theta} \end{pmatrix}$$

ところで

$$PV^2 = (a\cos\theta - \alpha)^2 + (b\sin\theta - \beta)^2 \qquad \text{であるが}$$

ここで、直線 $PV$ の傾きを考えて

$$\frac{b\sin\theta - \beta}{a\cos\theta - \alpha} = \frac{b}{a}\tan\theta$$

したがって、

$$(b\sin\theta - \beta)^2 = \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta(a\cos\theta - \alpha)^2$$

よって、

$$PV^2 = (a\cos\theta - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta(a\cos\theta - \alpha)^2$$

$$\Longleftrightarrow PV^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)(a\cos\theta - \alpha)^2 \tag{4}$$

同様にして、

$$GV^2 = (a\cos\theta + \alpha)^2 + (b\sin\theta + \beta)^2$$

$$\Longleftrightarrow GV^2 = (a\cos\theta + \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta(a\cos\theta + \alpha)^2$$

$$\Longleftrightarrow GV^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)(a\cos\theta + \alpha)^2 \tag{5}$$

したがって

$$(PV \cdot GV)^2 = PV^2 \cdot GV^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)(a\cos\theta - \alpha)^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)(a\cos\theta + \alpha)^2$$

$$\Longleftrightarrow (PV \cdot GV)^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)^2 \{(a\cos\theta - \alpha)(a\cos\theta + \alpha)\}^2$$

$$\Longleftrightarrow (PV \cdot GV)^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)^2 (a^2\cos^2\theta - \alpha^2)^2$$

ここで、　$PV \cdot GV > 0, \qquad 1 + \dfrac{b^2}{a^2}\tan^2\theta > 0$　であるから

$$PV \cdot GV = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)\left|a^2\cos^2\theta - \alpha^2\right|$$

また、点 P,G,V の位置的関係から

$|a\cos\theta| > |\alpha| \Longleftrightarrow (a\cos\theta)^2 > \alpha^2 \Longleftrightarrow a^2\cos^2\theta > \alpha^2$　だから

$$PV \cdot GV = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\theta\right)(a^2\cos^2\theta - \alpha^2) \tag{6}$$

次に、$XV^2$ の値を求める。

$XV^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2$であり、直線 $l$ の傾きを考えれば

$$\frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha} = -\frac{b}{a\tan\theta}$$

よって

$$(y_1 - \beta)^2 = \frac{b^2}{a^2\tan^2\theta}(x_1 - \alpha)^2$$

したがって

$$XV^2 = (x_1 - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2\tan^2\theta}(x_1 - \alpha)^2$$

$$\iff XV^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2 \tan^2 \theta}\right)(x_1 - \alpha)^2$$

また、

$$(x_1 - \alpha)^2 = (\alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \theta - \alpha^2 \tan^2 \theta} - \alpha)^2$$

$$\iff (x_1 - \alpha)^2 = a^2 \sin^2 \theta - \alpha^2 \tan^2 \theta$$

$$\iff (x_1 - \alpha)^2 = \tan^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta - \alpha^2)$$

よって

$$XV^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2 \tan^2 \theta}\right) \tan^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta - \alpha^2)$$

$$\iff XV^2 = \left(\tan^2 \theta + \frac{b^2}{a^2}\right)(a^2 \cos^2 \theta - \alpha^2) \tag{7}$$

したがって、(6), (7) より

$$\frac{PV \cdot GV}{XV^2} = \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \theta\right)(a^2 \cos^2 \theta - \alpha^2)}{\left(\tan^2 \theta + \frac{b^2}{a^2}\right)(a^2 \cos^2 \theta - \alpha^2)}$$

$$\iff \frac{PV \cdot GV}{XV^2} = \frac{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}{a^2 \tan^2 \theta + b^2}$$

これは、 $\dfrac{PV \cdot GV}{XV^2}$ が $V$ の取り方によらず一定となることを示している。

（証終）

## 4 考察・感想

今回、問題の解析にも書いたように私は座標計算で問題を解いたのですが平面幾何で解く方法も試みようとしました。おそらく、平面幾何で解くほうがあっさりとした解答になるのだろうと思われます。しかし、楕円についての性質をほとんど知らないので幾何的に処理することができませんでした。このほか極座標を使ってもできるのではないかと考えたのですが、問題で焦点が与えられていないので自分でその場合与えなければならなくなり面倒になると思い、また、それ以降、議論を展開する幾何的知識もないのでできませんでした。座標計算では、点 X の座標をパラメーター表示で表して、交点 V の座標を求める方法も試みたのですが、最後の最後で X に使用したパラメーターを消去することがどう変形しても私にはできず、結局、今回は、点 V の座標で点 X の座標を表すという方法で解きました。この方法ですれば、根号も出てきて多少計算は複雑にはなりますが、求めることができます。ただ、どちらの方法でしても計算は大変なものでした。