情報系の物理学 演習3

G99P043-4
河邊昌彦

出題日:2000 年 10 月 25 日
提出期限:2000 年 11 月 8 日
提出日:2000 年 11 月 4 日

1　問題

長さ π の弦の中心の一部 (幅 $a(<\pi)$) を $t=0$ で叩いたとする。$t=0$ で

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < \frac{\pi-a}{2}) \\ 1 & (\frac{\pi-a}{2} \le x < \frac{\pi+a}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi+a}{2} \le x < \pi) \end{cases} \end{aligned}$$

としたときの、$u(x,t)$ の変化を $t \ge 0$ で操作して図示せよ。
ただし弦は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を満たして動くとする。

2　解答

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\} + \int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \\ &= \int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \\ &= \int_{x-t}^{0} g(s)ds + \int_{0}^{x+t} g(s)ds \\ &= -\int_{-(x-t)}^{0} g(-s')ds' + \int_{0}^{x+t} g(s)ds \qquad (s=-s') \\ &= -\int_{0}^{-(x-t)} g(s')ds' + \int_{0}^{x+t} g(s)ds \end{aligned}$$

よって

$$h(x) = \int_0^x g(x')dx'$$

とすると、

$$u(x,t) = h(x+t) - h(-(x-t))$$

となる。
また、$g(x)$ は奇関数であるので

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_0^{-x} g(x')dx' \\ &= -\int_0^{x} g(-x')dx' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x g(x')dx' \\
&= h(x)
\end{aligned}
$$

よって

$$
u(x,t) = h(x+t) - h(x-t)
$$

である。

$h(x)$ は、偶関数で周期が 2π なので

$$
h(x) = \begin{cases}
h(x+2\pi) & (x < -\pi) \\
h(-x) & (-\pi \leq x < 0) \\
0 & (0 \leq x < \frac{\pi-a}{2}) \\
x - \frac{\pi-a}{2} & (\frac{\pi-a}{2} \leq x < \frac{\pi+a}{2}) \\
a & (\frac{\pi+a}{2} \leq x \leq \pi) \\
h(x-2\pi) & (\pi < x)
\end{cases}
$$

となる。

2.1　各関数のグラフ

$u(x,t)$ の t に関する周期は $h(x)$ と同じで 2π なので、$0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲でグラフを描いた。

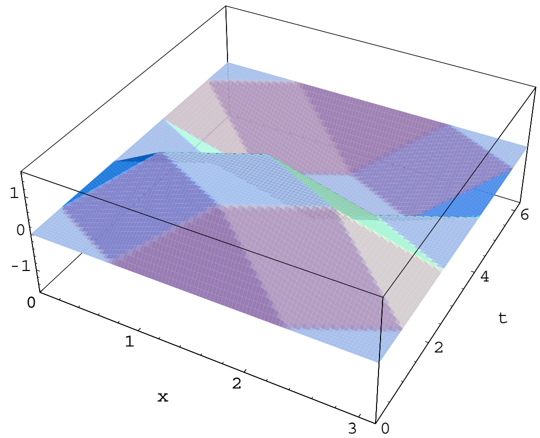

図 1: $u(x,t)\,(0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi, a = \frac{\pi}{2})$

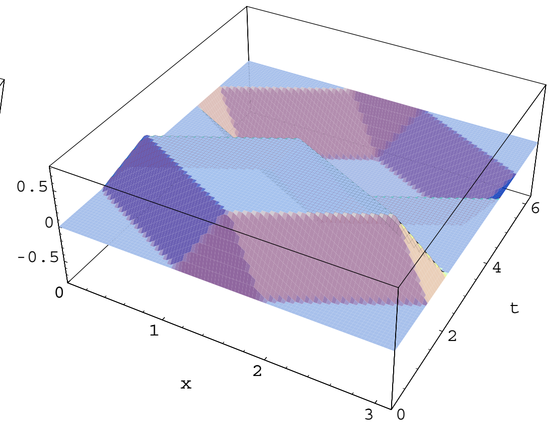

図 2: $u(x,t)\,(a = \frac{\pi}{4})$

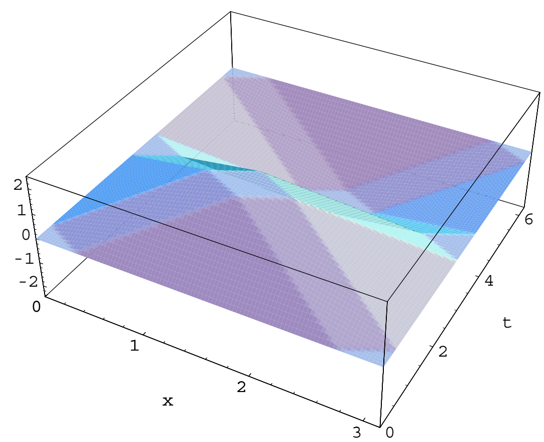

図 3: $u(x,t)\,(a = \frac{3\pi}{4})$

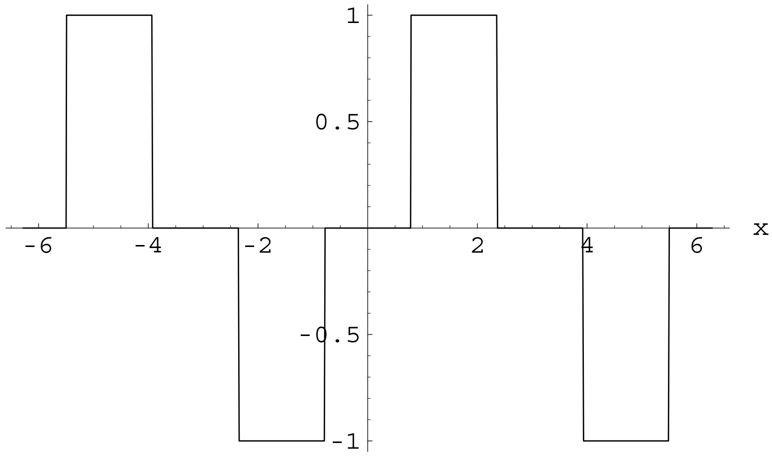

図 4: $g(x)\,(-2\pi \leq x \leq 2\pi, a = \frac{\pi}{2})$

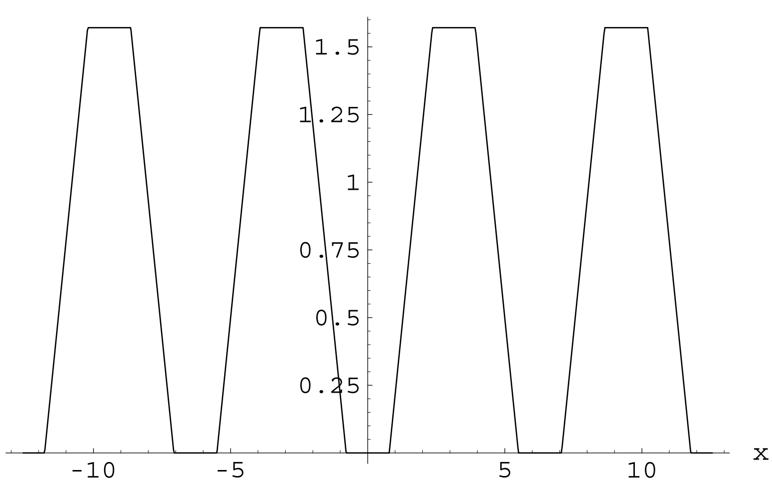

図 5: $h(x)\,(-2\pi \leq x \leq 2\pi, a = \frac{\pi}{2})$