情報系の物理学 演習5

G99P043-4
河邊昌彦

出題日:2000/11/15
提出期限:2000/11/29
提出日:2000/11/21

1　問題

1.1　演習 5

図 1 において、

$$\lim_{Q \to P} \frac{QR}{QT}$$

が SP によらない定数となることを示せ。
ただし、RPZ は P において楕円 O と接しており、S は楕円 O の焦点の一つである。
また、

$$QT \perp SP$$

であり、演習 5' の結果を使って良い。

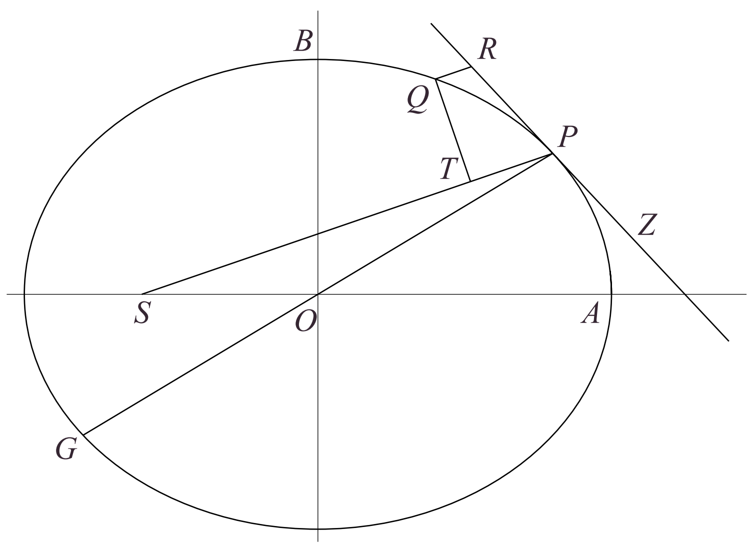

図 1: 演習 5

1.2　演習 5'

図 2 において、X の位置によらない定数 k が存在して、

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = k$$

となることを示せ。
ただし、直線 RPZ は P において楕円 O と接しており、l と ZPR は平行である。

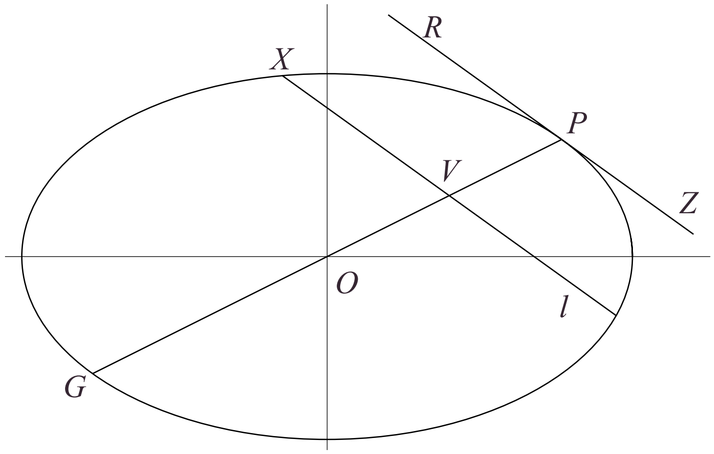

図 2: 演習 5'

2 解答

演習 5 に関しては、自力で解くことができなかったため、[1] の証明を参考にして自分なりにまとめてみた。演習 5' に関しては、証明は自分で考えたものである。

2.1 演習 5

図 3 において、H はもう片方の楕円の焦点であり、

$$
\begin{aligned}
RPZ \quad // \quad Qxv \quad // \quad IH \quad // \quad DOK \\
RPZ \quad \perp \quad PF
\end{aligned}
$$

とする。

まず、$PE = AO$ を示す。

$\triangle SOE \backsim \triangle SHI$, $SO = HO$ より

$$ES = EI \tag{1}$$

楕円の性質から $\angle RPI = \angle ZPH$、また、$RPZ \,//\, IH$ なので $\triangle PHI$ は二等辺三角形になる。よって、

$$PI = PH \tag{2}$$

楕円の定義から

$$SP + HP = 2AO \tag{3}$$

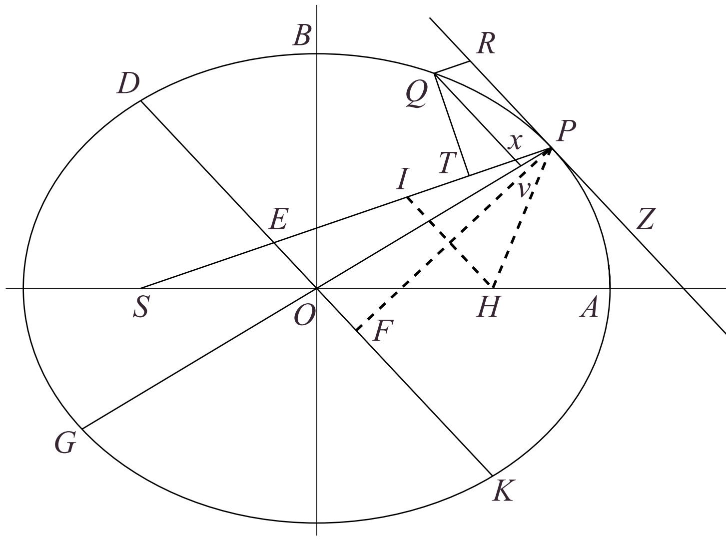

図 3: 演習 5 (解答)

(1), (2), (3) を合わせると

$$\begin{aligned} PE &= PI + EI \\ &= \frac{1}{2}(PH + PI + EI + ES) \\ &= \frac{1}{2} \times 2AO \\ &= AO \end{aligned} \tag{4}$$

また、$\triangle QTx \backsim \triangle PFE$ なので

$$\frac{Qx}{QT} = \frac{PE}{PF} \tag{5}$$

ここで、演習 5' と同じように楕円 O を短軸方向に $\frac{OA}{OB}$ 倍に拡大して円を作り、D, B, P, R に対応する点を D', B', P', R' とする。
OD', OB', OP' はその円の半径になるので、

$$OA = OD' = OB' = OP'$$

である。また、$OD' \,//\, P'R', OP' \perp P'R'$ なので

$$OP' \perp OD'$$

である。よって、

$$\triangle OP'D' \equiv \triangle OAB'$$

となって、

$$
\begin{aligned}
(\triangle OPD \text{ の面積 }) &= (\triangle OP'D' \text{ の面積 }) \times \frac{OB}{OA} \\
&= (\triangle OAB' \text{ の面積 }) \times \frac{OB}{OA} \\
&= (\triangle OAB \text{ の面積 }) \\
\therefore OA \cdot OB &= OD \cdot PF \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(4), (5), (6) より

$$
\begin{aligned}
\frac{Qx}{QT} &= \frac{PE}{PF} = OA \cdot \frac{OD}{OA \cdot OB} = \frac{OD}{OB} \\
\therefore \frac{Qx^2}{QT^2} &= \frac{OD^2}{OB^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Q が P に近づくと、PR と PQ が近づくことになるので

$$PR \gg Px \propto xv$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\lim_{Q\to P} \frac{Qv}{Qx} &= \lim_{Q\to P} \frac{Qx + xv}{Qx} = \lim_{Q\to P} \left(1 + \frac{xv}{PR}\right) = 1 \\
\therefore \lim_{Q\to P} \frac{Qv^2}{Qx^2} &= 1 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$PRQx$ は平行四辺形であることと、(4)、$\triangle Pxv \backsim \triangle PEF$ から

$$
\begin{aligned}
\frac{QR}{Pv} &= \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PO} = \frac{OA}{OP} \\
\therefore \frac{QR}{Pv} &= \frac{OA}{OP} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

演習 5' の結果から

$$\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{OP^2}{OD^2} \qquad (10)$$

(7), (8), (9), (10) の両辺を全て掛け合わせると

$$
\begin{aligned}
\frac{Qx^2}{QT^2} \cdot \left(\lim_{Q\to P} \frac{Qv^2}{Qx^2}\right) \cdot \frac{QR}{Pv} \cdot \frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} &= \frac{OD^2}{OB^2} \cdot 1 \cdot \frac{OA}{OP} \cdot \frac{OP^2}{OD^2} \\
\lim_{Q\to P} \frac{QR \cdot Gv}{QT^2} &= \frac{OA \cdot OP}{OB} \\
\lim_{Q\to P} \left(\frac{QR}{QT^2} \cdot \frac{Gv}{OP}\right) &= \frac{OA}{OB} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

ここで、$Q \to P$ のときは $v \to P$ となり $Gv \to GP = 2OP$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{Q\to P}\left(\frac{QR}{QT^2}\cdot\frac{Gv}{OP}\right) &= \lim_{Q\to P}\left(\frac{QR}{QT^2}\right)\cdot\frac{2OP}{OP} \\ &= 2\lim_{Q\to P}\frac{QR}{QT^2} \qquad (12)\end{aligned}$$

(11), (12) から

$$\lim_{Q\to P}\frac{QR}{QT^2} = \frac{OA}{2OB} \qquad (13)$$

右辺は SP によらない定数であるので、題意は示された。
(証明終り)

2.2 演習 5'

まず、以下に示す補題を証明する。

補題 半径 a の円を $\frac{b}{a}$ 倍に拡大したものは、長半径 a、短半径 b の楕円と合同である。

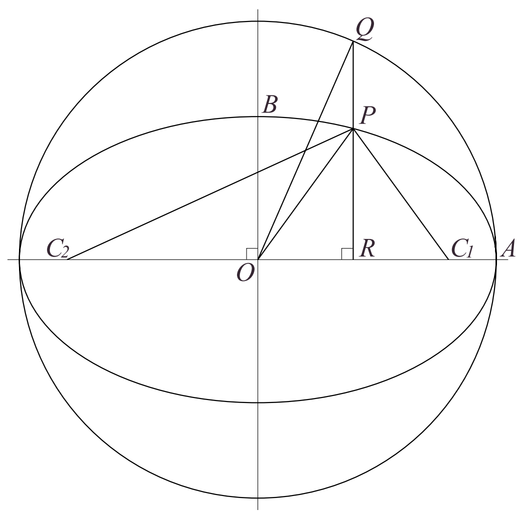

図 4: 長半径 a、短半径 b の楕円と半径 a の円

補題の証明 図 4 は、長半径 a、短半径 b の楕円と半径 a の円で、その中心は等しい点である。また、C_1, C_2 は楕円の焦点である。
ここで、

$$\begin{array}{llll} OA = a & OB = b & OC_1 = OC_2 = c & OP = r \\ PR = y_1 & QR = y_2 & C_1P = l_1 & C_2P = l_2 \end{array}$$

とする。
楕円の定義から

$$l_1 + l_2 = 2a \tag{14}$$

y_1 に関する等式から

$$r^2 - x^2 = {l_2}^2 - (c+x)^2 = {l_1}^2 - (c-x)^2 \tag{15}$$

(14) と (15) を r に関して解くと、

$$\begin{aligned}
{l_2}^2 - {l_1}^2 &= (c+x)^2 - (c-x)^2 = 4cx \\
(l_2+l_1)(l_2-l_1) &= 4cx \\
l_2 - l_1 &= \frac{2c}{a}x \\
2l_2 &= 2a + \frac{2c}{a}x \\
\therefore r^2 &= x^2 + \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 - (x+c)^2 \\
&= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 - 2cx - c^2 \\
&= \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2 - c^2
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{{y_1}^2}{{y_2}^2} &= \frac{r^2 - x^2}{a^2 - x^2} \\
&= \frac{\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2 + a^2 - c^2}{a^2 - x^2} \\
&= \frac{(a^2-c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{a^2 - x^2} \\
&= \frac{(a^2-c^2)\frac{a^2-x^2}{a^2}}{a^2 - x^2} \\
&= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \\
&= \frac{b^2}{a^2}
\end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$$

となって、どのような x の値に対しても対応する点の位置が $\frac{b}{a}$ 倍されている。即ち、半径 a の円を $\frac{b}{a}$ 倍に拡大すると、長半径 a、短半径 b の楕円となる。
(証明終り)

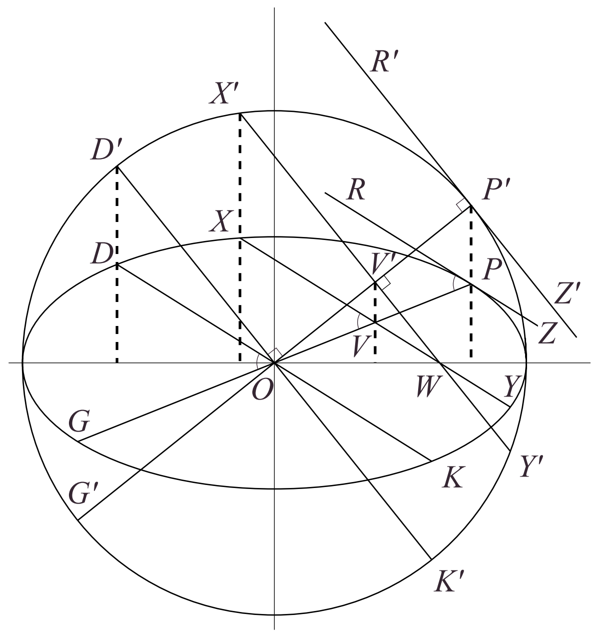

図 5: 演習 5’ (解答)

問題の証明　題意の楕円 O を短軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍したものは、補題により、半径 a の円である。図 5 は、それらの楕円と円を重ねたものであり、X', V', P' 等はそれぞれ X, V, P 等に対応する点である。
また、平行な 2 直線は拡大した後も平行であり、接線は拡大後も対応する点における接線である。よって、

$$
\begin{array}{ccccc}
RPZ & // & XVY & // & DOK \\
R'P'Z' & // & X'V'Y' & // & D'O'K'
\end{array}
$$

$$
R'P'Z' \perp OP'
$$

なので、

$$
\begin{array}{ccccccc}
\triangle WX'X & \backsim & \triangle WV'V & \backsim & \triangle WY'Y & \backsim & \triangle OD'D \\
\triangle OP'P & \backsim & \triangle OV'V & \backsim & \triangle OG'G & &
\end{array}
$$

である。よって、以下のように α, β を定義する。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\alpha & = & X'V' : XY & = & V'Y' : VY & = & OD' : OD \\
\beta & = & G'V' : GV & = & V'P' : VP & = & OP' : OP
\end{array}
\tag{16}
$$

また、$\triangle V'X'G' \backsim \triangle V'P'Y'$ なので

$$
\begin{array}{ccc}
V'X' : V'P' & = & V'G' : V'Y' \\
V'X' \times V'Y' & = & V'G' \times V'P'
\end{array}
$$

$G'P'$ は円 O の直径で $X'Y' \perp OP'$ なので、$V'X' = V'Y'$ である。

$$\therefore V'X'^2 = V'G' \times V'P' \tag{17}$$

(16) より、α, β を使って (17) を書きかえると、

$$\begin{aligned} \alpha^2 XV^2 &= \beta^2 GV \times PV \\ \therefore \frac{GV \times PV}{XV^2} &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{aligned} \tag{18}$$

さらに (16) を使って書きかえると、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\beta^2} &= \frac{OD'^2}{OD^2} \Big/ \frac{OP'^2}{OP^2} \\ &= \frac{OP^2}{OD^2} \cdot \frac{OD'^2}{OP'^2} \\ &= \frac{OP^2}{OD^2} \end{aligned} \tag{19}$$

(18) と (19) から

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = \frac{OP^2}{OD^2} = k$$

(証明終り)

参考文献

[1] 齋藤和幸 : ニュートン力学の形成とプリンキピア
http://shinano.ed.niigata-u.ac.jp/~kobayasi/97sotu/newton/soturon.html