情報系の物理学 演習6

G99P043-4
河邊昌彦

出題日:2000/11/22
提出期限:2000/12/06
提出日:2000/11/28

1 問題

$|x\rangle$ と $|y\rangle$ が

$$\begin{aligned} |x\rangle &= |x_1 x_2 \ldots x_n\rangle \\ |y\rangle &= |y_1 y_2 \ldots y_n\rangle \end{aligned}$$

ならば

$$\langle x_1 x_2 \ldots x_n | y_1 y_2 \ldots y_n\rangle = \langle x_1|y_1\rangle \ldots \langle x_n|y_n\rangle$$

となることを示せ。

2 解答

2.1 $|x_i\rangle \in C^2$ の場合

$$\begin{aligned} |x\rangle &= |x_1 x_2 \ldots x_n\rangle \\ &= |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \ldots \otimes |x_n\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{2^n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると、テンソル積に定義から

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_{1i_1} x_{2i_2} \ldots x_{ni_n} \\ i &= 2^{n-1} i_1 + 2^{n-2} i_2 + \ldots + i_n \\ i_j &\in \{0,1\} \quad (1 \le j \le n) \end{aligned}$$

である。$i_1 i_2 \ldots i_n$ は i の 2 進表示なので、$\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ と $\overbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}^{n}$ の間には全単射が存在する。

ここで、

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{2^n-1} \end{pmatrix} \quad , \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{2^n-1} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\langle x| = |x\rangle^* = ({\xi_0}^* \ldots {\xi_{2^n-1}}^*)$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= \langle x_1x_2\ldots x_n|y_1y_2\ldots y_n\rangle \\
&= ({\xi_0}^*\ldots{\xi_{2^n-1}}^*)\begin{pmatrix}\eta_0\\ \vdots \\ \eta_{2^n-1}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1}{\xi_i}^*\eta_i \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{1}\left((x_{1i_1}x_{2i_2}\ldots x_{ni_n})^*\,y_{1i_1}y_{2i_2}\ldots y_{ni_n}\right) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{1}({x_{1i_1}}^*{x_{2i_2}}^*\ldots{x_{ni_n}}^*y_{1i_1}y_{2i_2}\ldots y_{ni_n}) \\
&= \sum_{i_1=0}^{1}\ldots\sum_{i_n=0}^{1}({x_{1i_1}}^*y_{1i_1}\ldots{x_{ni_n}}^*y_{ni_n}) \\
&= \sum_{i_1=0}^{1}({x_{1i_1}}^*y_{1i_1})\ldots\sum_{i_n=0}^{1}({x_{ni_n}}^*y_{ni_n}) \\
&= \langle x_1|y_1\rangle\ldots\langle x_n|y_n\rangle
\end{aligned}
$$

(証明終り)

2.2 $|x_i\rangle \in C^m$ の場合

$|x_i\rangle \in C^2$ の場合と同様に証明できる。

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= |x_1x_2\ldots x_n\rangle \\
&= |x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\otimes\ldots\otimes|x_n\rangle \\
&= \begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \vdots\\ \xi_{m^n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= x_{1i_1}x_{2i_2}\ldots x_{ni_n} && (0\leq i\leq m^n-1) \\
i &= m^{n-1}i_1+m^{n-2}i_2+\ldots+i_n \\
i_j &\in \{0,\ldots,m-1\} && (1\leq j\leq n)
\end{aligned}
$$

である。$i_1i_2\ldots i_n$ は i の m 進表示なので、$\{0,1,\ldots,m^n-1\}$ と $\overbrace{\{0,\ldots,m-1\}\times\{0,\ldots,m-1\}\times\ldots\times\{0,\ldots,m-1\}}^{n}$ の間には全単射が存在する。

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{m^n-1} \end{pmatrix} \quad , \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{m^n-1} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= ({\xi_0}^* \ldots {\xi_{m^n-1}}^*) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{m^n-1} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{m^n-1} {\xi_i}^* \eta_i \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{m-1} \left((x_{1i_1} x_{2i_2} \ldots x_{ni_n})^* \, y_{1i_1} y_{2i_2} \ldots y_{ni_n} \right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{m-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{m-1} ({x_{1i_1}}^* y_{1i_1} \ldots {x_{ni_n}}^* y_{ni_n}) \\
&= \sum_{i_1=0}^{m-1} ({x_{1i_1}}^* y_{1i_1}) \ldots \sum_{i_n=0}^{m-1} ({x_{ni_n}}^* y_{ni_n}) \\
&= \langle x_1|y_1\rangle \ldots \langle x_n|y_n\rangle
\end{aligned}$$

(証明終り)

以上により、問題の等式は m^n 次元テンソル積ベクトル空間においても一般的に成り立つことが分かった。