情報系の物理学　レポート　第５回

g99p0127　稲垣　良一

出題日 11 月 15 日
提出日 11 月 27 日
提出期限 11 月 29 日

1　問題

図１のように、楕円上に点Ｐをとり、その接線を l_p とする。他に楕円上に適当な点Ｘを取とり、l_p に平行な直線 l_x を引く。楕円の中心を点Ｏとし、ＰＯを延長して楕円と再び交わる点をＧとする。また l_x と直線ＰＯＧの交点を点Ｖとする。

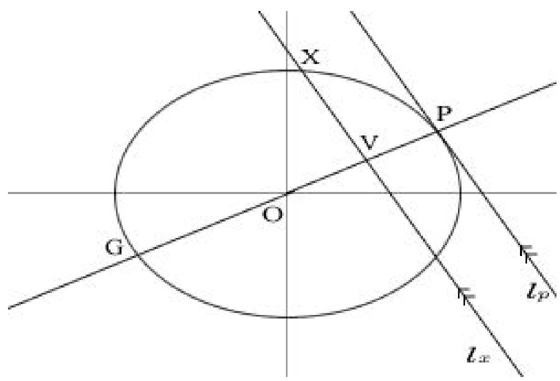

図 1:

この時、点Ｘ取り方に依らずある定数 K が存在して、

$$\frac{GV \times PV}{XV^2} = K \qquad (1)$$

であることを示せ。

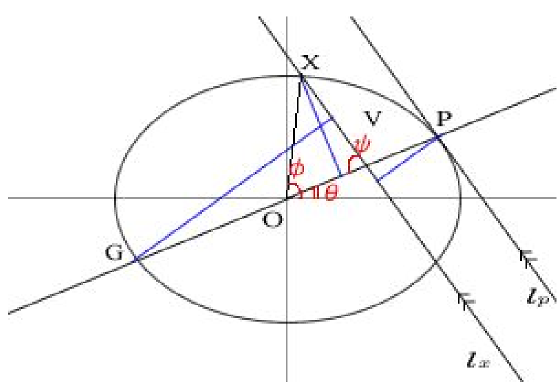

図 2:

2　解法

図２のようにＸ軸と線分ＰＯ，ＸＯが作る角度をそれぞれ θ, φ とし、角ＸＶＯを ψ と定義する。また、点Ｘから線分ＰＧにむけて、点Ｐ，Ｇから線分 l_x にむけてそれぞれ垂線 (図２中の青線) をひき、交点をそれぞれ V_X, V_P, V_G と定義する。

これらの記号を用いると、問題に必要な値は

$$\begin{aligned} XV &= \frac{XV_X}{\sin\psi} \\ PV &= \frac{PV_P}{\cos\psi} \\ GV &= \frac{GV_G}{\cos\psi} \end{aligned}$$

と与えられる。ある点から直線までの最短距離（すなわち点から直線まで垂線を引いた場合の長さ）は公式に当てはめれば簡単にもとまるので、

$$K = \frac{GV \times PV}{XV^2} = \left(\frac{GV_G \times PV_P}{(XV_X)^2}\right)\tan^2\psi \tag{2}$$

この式が点Ｘに依存しないことが証明できればよい。つまりは φ に依存しなければよい。

3　解答

楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

なので、各点の座標は、

$$\begin{cases} P & (a\cos\theta, b\sin\theta) \\ G & (-a\cos\theta, -b\sin\theta) \\ X & (a\cos\varphi, b\sin\varphi) \end{cases} \tag{3}$$

である。楕円の点 (x', y') における接線の方程式は

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

の形で表現できる。よって接線 l_p は、

$$\frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1 \tag{4}$$

となる。接線 l_x についても傾きは l_p と同じなので値を入れ替えて、

$$bx\cos\theta + ay\sin\theta - ab\cos(\theta-\varphi) = 0 \tag{5}$$

で表される。
また、直線ＰＧの方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{b}{a}\tan\theta\right)x \\ bx\sin - ay\cos\theta &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。ある点 (x, y) から方程式 $ax+by+c=0$ までの距離は

$$\frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{7}$$

で与えられるので、(3) の値をそれぞれ代入すると、 XV_X, PV_P, GV_G は、

$$\begin{aligned} XV_X &= \frac{|ab\sin\theta\cos\varphi - ab\cos\theta\sin\varphi|}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{|ab\sin(\theta-\varphi)|}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} PV_P &= \frac{|ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta - ab\cos(\theta-\varphi)|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{|ab(1-\cos(\theta-\varphi))|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} QV_P &= \frac{|-ab\cos^2\theta - ab\sin^2\theta - ab\cos(\theta-\varphi)|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{|ab(1+\cos(\theta-\varphi))|}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。これらの値を (2) に代入すればよい。

$$\begin{aligned} (XV_X)^2 &= \frac{a^2b^2\sin^2(\theta-\varphi))}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta} \\ GV_G \times PV_P &= \frac{a^2b^2(1-\cos^2(\theta-\varphi))}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta} \\ &= \frac{a^2b^2\sin^2(\theta-\varphi))}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{GV_G \times PV_P}{(XV_X)^2}\right)\tan^2\psi \\ &= \left(\frac{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\right)\tan^2\psi \end{aligned}$$

よって、この式よりＫの値が点Ｘに依存しない値であることは明らかである。（証明終）