

# 完全楕円積分とガウス・ルジャンドル法による $\pi$ の計算

寒川 光

平成 29 年 4 月 14 日

## 目次

1	はじめに：算術幾何平均とガウスの公式	2
2	完全楕円積分	4
2.1	楕円の周長と第 2 種完全楕円積分	4
2.2	単振り子の周期と第 1 種完全楕円積分	5
2.3	楕円積分の標準形	7
2.3.1	楕円積分の標準形への変換	7
2.4	楕円積分と楕円関数小史	8
3	完全楕円積分の算術幾何平均法による計算	9
3.1	項別積分と区分求積法	9
3.1.1	第 1 種完全楕円積分のべき級数展開による計算	9
3.1.2	第 1 種完全楕円積分の区分求積法による計算	11
3.2	関連する積分と母数・補母数の関係式	13
3.3	ランデン変換と算術幾何平均法	13
3.3.1	完全楕円積分のランデン変換	15
3.3.2	第 1 種完全楕円積分の算術幾何平均法	15
3.3.3	第 2 種完全楕円積分の算術幾何平均法	17
4	ルジャンドルの関係式	19
4.1	完全楕円積分の導関数	19
4.2	定数になること	20
4.3	定数の値	20
5	ガウスの公式	21
A	レムニスケート曲線とその作画	24
A.1	レムニスケート曲線の定義	24
A.2	レムニスケート曲線の第 2 の定義	26
A.3	レムニスケート曲線の数学的特長	28
A.3.1	原点から直角双曲線の接線への垂足の軌跡	28
A.3.2	直角双曲線上に中心をもち原点を通る円の包絡線	28
A.3.3	リンク機構によるレムニスケートの作図	30
A.3.4	レムニスケート曲線の弧長	32
A.4	ガウスと算術幾何平均とレムニスケート曲線	32

スーパーコンピュータの検収（新たに開発された情報システムが仕様通りに稼動することを検査すること、inspection）に  $\pi$  の超高精度計算が用いられることがある [1, p. 1228] . そのアルゴリズムがガウス・ルジャンドル法であることが多い。「ガウスの公式」と呼ばれるこの方法を、1799 年にガウスが発見したとき、「この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう」と 5 月 30 日付けで日記に記している [2, p. 35]<sup>1</sup> . 論文の形でこの公式の証明が現れるのは、計算機を使用して  $\pi$  の高精度計算を競う時代を迎える 1976 年で、E. Salamin と R. Brent によって独立に発表された . 証明は、完全楕円積分の第 1 種と第 2 種の公式に、ルジャンドルの関係式を連立させることで、 $\pi$  を未知数に回してなされた .

本資料でははじめに、算術幾何平均とガウスの公式を（証明なしで）紹介する<sup>2</sup> . 2 章で、完全楕円積分を、大学初年度の数学知識で理解できるように説明し、その歴史を顧みる . 3 章で完全楕円積分第 1 種を算術幾何平均法で数値解求める方法と、第 2 種と第 1 種の関係式を解説する . 4 章でルジャンドルの関係式を示す . 5 章でガウス・ルジャンドル法の証明を示す .

公式をガウスが発見したとき、ガウスはレムニスケート曲線の弧長を計算していた . 付録に、レムニスケート曲線とその作画方法を紹介し、楕円積分とその逆関数である楕円関数の生まれた時代の紹介を高木先生の著書から引用する .

## 1 はじめに：算術幾何平均とガウスの公式

与えられた正の実数  $a > b$  から、 $a_0 = a, b_0 = b$  とおき、

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

によって数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  を定義する .  $\{a_n\}$  は下に有界な単調減少数列、 $\{b_n\}$  は上に有界な単調増加数列であるから収束する .

$$b < b_1 < b_2 < \dots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \dots < a_2 < a_1 < a \quad (2)$$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  が存在する . さらに

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (3)$$

より  $\alpha = \beta$  を得る . 極限值  $\alpha$  を  $a$  と  $b$  の算術幾何平均 (Arithmetic Geometric Mean) といい、複数の平均を扱う場合は  $AGM(a, b)$  で表すことが多い . 本資料では平均はこれしか扱わないので、1 文字で  $M(a, b)$  で表す . ガウスは次の公式を導いた .

$$a_0 = 1, b_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \text{ とすれば,}$$

$$\pi = \frac{M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2} \quad (4)$$

によって  $\pi$  が得られる .

<sup>1</sup>Carl Friedrich Gauss (1777.4.30–1855.2.23) はドイツの数学者 . ガウスの時代（日本では江戸時代後期）には、職業数学者のポストはまだなかった . これが成立するのは大学制度と関係している . それ以前は貴族王侯から助成を受ける者として存在した . また、当時は論文を送るべき学会も存在せず、成果は自家印刷の小冊子や単行本によって発表した . ガウスの整数論 “Disquisition Arithmetica” も単行本として発表された (1801 年) . そのような時代だったので、ガウスが証明したかどうかの記録はない .

<sup>2</sup>本資料は、筆者が芝浦工業大学の数理科学科の 1 年生を対象とした少人数のセミナーで、小林昭七先生の『円の数学』をテキストとして  $\pi$  の計算を教えたときに用意した講義ノートをもとに作成した [3] . 必要な数学知識は、大学入学試験の範囲の (1 変数の) 微分と積分の範囲とした . 十進 BASIC のような高精度な計算がサポートされるプログラミング環境を用いてプログラミング実習できる .

$b_0 = 0.707$  として有効数字 3 桁で筆算すると、数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  は  $a_1 = 1.707 \div 2 \doteq 0.854$ ,  $b_1 = \sqrt{0.707} \doteq 0.841$ ,  $a_2 = 1.695 \div 2 \doteq 0.848$ ,  $b_2 = \sqrt{0.854 \cdot 0.841} \doteq 0.847$  となる。  $a_2 + b_2 = a_1 + b_1$  かつ  $a_2 b_2$  と  $a_1 b_1$  も 4 桁が一致するので、有効数字 3 桁の計算では算術幾何平均がこれ以上先へ進まなくなる。  $c_i^2$  は小さな値で、ガウスの公式 (4) の分母の演算は、総和演算は 3 桁では切り捨てられて変化せず、したがって  $\pi$  へ向うはずの値も 3.42 で止まってしまう。

筆算で桁数を増やすのは大変なので、十進 BASIC で有効数字を増やして計算してみよう。PI は  $\pi$  の近似値で、組込み定数である。

Gauss.BAS

```

LET a=1
LET b=1/SQR(2)
LET s=b^2
LET t=1
FOR i=1 to 5
  LET x=(a+b)/2      ! 算術平均 ( a_i + b_i ) / 2
  LET y=SQR(a*b)    ! 幾何平均 sqrt{ a_i * b_i }
  LET c=(a-b)/2     ! c_i = ( a_i - b_i ) / 2
  LET t=t*2         ! 2^i
  LET s=s+t*c^2     ! s_i = \sum 2^i * c_i^2
  LET a=x
  LET b=y
  LET p=(2*a^2)/(1-s) ! 算術幾何平均法による \pi の計算値
  PRINT I;"p=";P;
  PRINT p-PI        ! 組込み定数 PI と計算値との差
NEXT i
END

```

10 進 15 桁モードで実行すると、有効数字 15 桁で計算して、次の表示を得る。

```

1 p= 3.18767264271211 4.60799891223168E-2
2 p= 3.14168029329766 8.7639707866762E-5
3 p= 3.14159265389546 3.05666762E-10
4 p= 3.1415926535898 6.762E-15
5 p= 3.1415926535898 6.762E-15

```

4 回の反復で組込み定数の PI の 15 桁に達し、それ以上の精度は得られない。さらに有効数字を 1000 桁で計算するために、“p/q” をクリックして、1000 桁モードで実行すると次の表示を得る。

```

1 p= 3.187672642712108627201929970525369232651053571859369 以下, 略
.0460799891223153887392865872458663484538841724842634055 以下, 略
2 p= 3.14168029329765329391807042456000938279571943881540 以下, 略
.000087639707860055455427041280506498598550039440297011669 以下, 略
3 p= 3.1415926538954464960029147588180434861088792372613 以下, 略
.000000000305653257540271375538540601911709837886205768676 以下, 略
4 p= 3.14159265358979323846636060270663132175770241134 以下, 略
.000000000000000000000000037172194271284375605330119673235355 以下, 略
5 p= 3.141592653589793238462643383279502884197169949164 以下, 略
.00000000000000000000000000000000000000000000549789620784 以下, 略

```

5 回の反復で組込み定数の PI に 42 桁合っていることが確かめられる。反復ごとに小数点の後に続く零の数が倍になってゆく。これを 2 次収束という。したがって 10 回反復すれば 1000 桁に達する。この収束の速さと、1 回の反復で行う計算が少ないことが、ベンチマークプログラムに選ばれる理由である。

この計算では初期値  $b_0$  が無理数で、これを最終的に求めたい 1000 桁の精度で保持し、すべての算術演算を 1000 桁で行っている（十進 BASIC の 1000 桁モードは、1001 桁目を正しく求め、四捨五入して 1000 桁としているものと思われる）。ガウスの公式 (4) の分母には、算術平均  $a_n$  と幾何平均  $b_n$  の差の総和項があるので、 $\pi$  を求めたい精度以上でこれらの平均を計算する必要がある。もし途中のどこかで精度が欠ければ、それは最終的に分母の総和項に現れるので、最終的な  $\pi$  の近似値に影響する。

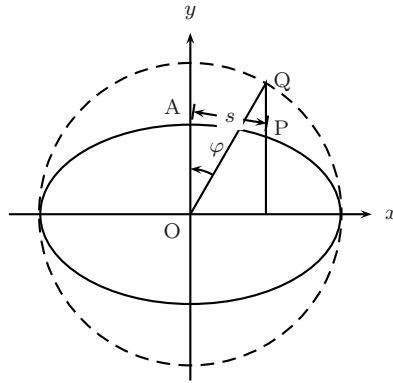


図 1: 楕円の周長

## 2 完全楕円積分

大学に入って積分の勉強をした後で、力学の問題を解こうと思うのだが、簡単そうに見える積分が、いろいろの置換や変形をしてみても積分できず意外と感じた経験をもつ人も多いと思う。不定積分（逆微分）を求める一般的な方法はない。微分法では積・商の公式もあったが、積分法では積  $\int f(x)g(x)dx$ ，商  $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$  のすべての場合に使えるような一般的な方法がないので、積・商の公式はない。微分の場合には、有理関数、代数関数を微分したものはやはり有理関数、代数関数となるが、積分の場合には

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x|, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$$

のように、ごく簡単な有理関数の積分でも対数関数や逆三角関数が現れる。まして、無理関数の積分となると、一般には複雑な関数になる。楕円積分（elliptic integral）の名称は、楕円の弧長が第 2 種楕円積分で表されることに基づく。

### 2.1 楕円の周長と第 2 種完全楕円積分

長径が  $2a$ ，短径が  $2b$  の楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \quad (5)$$

の第 1 象限の部分の弧長を求めてみよう（図 1）。楕円の扁平の度合いを表すパラメータとして離心率は

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (6)$$

によって定義される。  $k = 0$  のとき  $a = b$  で楕円は円になり、  $k = 1$  のとき  $b = 0$  で楕円はつぶれて  $(-a, 0)$  と  $(a, 0)$  を結ぶ線分になる。

第 1 象限にある楕円の周上の点  $P$  をとり、離心率の余角を  $\varphi$  とすると、  $P$  の座標は  $(a \sin \varphi, b \cos \varphi)$  となる<sup>3</sup>。点  $A$  から  $P$  までの弧長を  $s$ ，離心率を  $k$  とする。

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

したがって弧長は

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE(\varphi, k) \quad (7)$$

<sup>3</sup>楕円上の点  $P$  から長軸（ $x$  軸）に垂線を引き、これが  $P$  のほうへの延長と、点線で示した補助円との交点を  $Q$  とする。 $QO$  と長径（ $x$  軸）のなす角を離心率（eccentric angle）という。

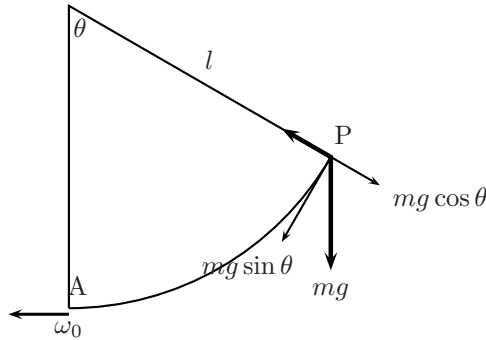


図 2: 単振り子の振動系

となる．この積分を第 2 種楕円積分といい， $E(\varphi, k)$  で表す．第 2 種の楕円積分の標準形を示す．

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(\varphi, k) \quad (8)$$

$u = \sin \theta$  と置換することで，三角関数の表示を得る． $\varphi$  を振幅，離心率  $k$  を母数 (modulus) という．

振幅  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  としたものを，第 2 種完全楕円積分 (complete elliptic integral of the second kind) といいい， $E(k)$  で表す．

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (9)$$

$aE(k)$  が，長軸半径  $a$ ，短軸半径  $b$ ，式 (6) で与えられる離心率 (母数)  $k$  の楕円の第 1 象限の弧長である． $k=0$  であれば，半径が  $a$  の四分円の弧長で  $\frac{a\pi}{2}$ ， $k=1$  のとき長さ  $a$  の線分になる．

## 2.2 単振り子の周期と第 1 種完全楕円積分

第 2 種楕円積分の三角関数表示の被積分関数の逆数を積分した

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = F(\varphi, k) \quad (10)$$

を第 1 種楕円積分という．

振幅  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  としたものを，第 1 種完全楕円積分 (complete elliptic integral of the first kind) といいい， $K(k)$  で表す．

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (11)$$

第 2 種完全楕円積分が「楕円の第 1 象限の周長」を表すのに対し，第 1 種完全楕円積分は「単振り子の周期」を表す．

質量  $m$  の物体を長さ  $l$  の棒によって固定点から吊り下げた振り子で，物体の大きさや棒の重さ・伸び等を無視して理想化したものを単振り子 (simple pendulum) という．重力を一様とし，空気抵抗などの外力を無視するとき，適当な初期条件のもとで単振り子は鉛直平面内の運動をする．図 2 において，物体 P が  $\theta$  の位置まで引かれ，放された後，振れる運動を数値計算してみよう．P は半径  $l$  の円周上の運動をし，接線方向の外力が  $mg \sin \theta$  なので，運動方程式は  $m \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$  である．したがって，解くべき微分方程式は次式である．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (12)$$

$\sin \theta \doteq \theta$  の線形近似なしに解くと、周期は振幅が大きくなるとともに長くなる。最下点における角速度を  $\omega_0$  として、初期条件を  $t = 0$  のとき  $\theta = 0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$  とする。

微分方程式 (12) の両辺に  $2\frac{d\theta}{dt}$  をかけて  $2\frac{d^2\theta}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2g}{l}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$  として、 $t$  について積分すると、

$$2 \int \frac{d^2\theta}{dt^2} d\theta = -\frac{2g}{l} \int \sin\theta d\theta \quad (13)$$

になり、微分方程式

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} \cos\theta + C \quad (14)$$

が得られる<sup>4</sup>。積分定数は、初期条件より  $C = \omega_0^2 - \frac{2g}{l}$  と決まる。

さらに  $k = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$  とおくと、微分方程式が次の形になる。

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (15)$$

この微分方程式の解は、 $k < 1$  の場合が  $180^\circ$  よりも小さい角  $\theta$  での振動を表す。

$k = \sin \frac{\alpha}{2}$  を満足する  $180^\circ$  より小さい角  $\alpha$  があり、 $\theta = \alpha$  のとき  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  となって、振子は瞬間的に静止して引き返す。このとき式 (15) から

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (16)$$

が得られる。これを標準形に直すために  $\sin \frac{\theta}{2} = kx$  とおき、主値を用いた逆正弦関数を、大文字を用いて  $\text{Sin}^{-1}$  で表すと、

$$d\theta = d(2\text{Sin}^{-1} kx) = \frac{2k}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} dx \quad (17)$$

と書けるので、

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\text{Sin}^{-1} x, k) \quad (18)$$

が得られる。最高点に達するまでの時間は  $\theta = \alpha$  が  $x = 1$  に対応するから  $\sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$  で与えられる。周期は最高点に達するまでの時間の 4 倍なので、

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (19)$$

となる。

$k = 1$  の場合は式 (16) で  $k = 1$  を代入して、 $t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$  より、 $\varphi \rightarrow \pi$  のとき  $T \rightarrow \infty$  である。質点 P は、理論上は無限の時間をかけて、真上の点に近づく。

$k > 1$  の場合は式 (15) から  $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$  で、質点 P は静止する瞬間がない。これは回転運動を表す。

<sup>4</sup>微分方程式 (14) の両辺を  $\theta$  で微分して、積分式 (13) の被積分関数が得られることを確認せよ。

## 2.3 楕円積分の標準形

$x$  の整式  $p(x)$  の平方根を  $s = \sqrt{p(x)}$  として,  $x$  と  $s$  との既約な有理式  $f(x, s)$  で表される  $x$  の無理関数について, その積分を考える.

$$\int f(x, \sqrt{p(x)}) dx \quad (20)$$

$p(x)$  が 1 次式または 2 次式のときは, すべて  $x$  の初等関数で表される<sup>5</sup>. 大学入試で出される不定積分の計算問題にはこのタイプは含まれる.  $p(x)$  が 3 次以上の整式の場合, 積分は一般には初等関数にならない<sup>6</sup>. 大学入試で出される不定積分の計算問題はこのタイプは含まれない (はずである).  $p(x)$  が 3 次式または 4 次式のとき, この積分を楕円積分といい, 5 次以上の整式のとき超楕円積分という<sup>7</sup>.

楕円積分は変数変換と式の変形により, 3 種類の標準形の積分と初等関数とで表される. 3 種類は, 第 1 種の楕円積分の標準形 (11), 第 2 種の楕円積分の標準形 (9) に, 次の第 3 種の楕円積分の標準形

$$\int_0^x \frac{du}{(1+cu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1+c\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \Pi(\varphi; c, k)$$

である.

$k$  は母数 (modulus),  $\varphi$  は振幅,  $c$  はパラメタと呼ばれる. また  $k' = \sqrt{1-k^2}$  を補母数という. これらの積分は  $k \neq 0, 1$  ならば初等関数では表されない. 楕円積分の  $p(x)$  が実係数の 3 次式または 4 次式で, 変数  $x$  がこれを負にしないような実数値をとるとき, 実楕円積分という. 本稿ではこの場合を扱う.

### 2.3.1 楕円積分の標準形への変換

実楕円積分の標準形への変換を, 2 段階に分けて述べる [4, p. 8].

第 1 段階では,  $p(x)$  を 2 つの, 1 次の項をもたない 2 次式の積にする. これは, 次の 4 つの場合に分けて行う.

- $p(x)$  が 3 実根をもつ 3 次式の場合
- $p(x)$  がただ 1 つの実根をもつ 3 次式の場合
- $p(x)$  が虚根をもつ 4 次式の場合
- $p(x)$  が 4 つの実根を持つ 4 次式の場合

について,  $p(x)$  を 1 次の項をもたない 2 次式の積にする.

$p(x)$  が 3 実根をもつ 3 次式の場合を例示する.  $p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ ,  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$  と表される. よって,  $a > 0$  のとき,  $x-\alpha_3 = y^2$  とおくと,  $dx = 2ydy$ ,  $\sqrt{p(x)} = y\sqrt{a(y^2 - (\alpha_1 - \alpha_3))(y^2 - (\alpha_2 - \alpha_3))} = \sqrt{q(y)}$ .

第 2 段階では, 根号内の式  $q(y)$  を  $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ ,  $0 < k < 1$  の形に変換する. これは  $y$  のとる値によって,

<sup>5</sup>例えば  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2\log(1+\sqrt{x})$  であり,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$  である.

<sup>6</sup>この形の積分でも  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1}x^2$  のように初等関数で表されるものもある. このようなものを擬楕円積分という.

<sup>7</sup>3 次か 4 次かは, 変数変換でどちらの形にも直すことができるので本質的な差はない. 例えば  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  は  $x = \sqrt{-t}$  で  $-\int \frac{dt}{2\sqrt{t^3-t}}$  にできる.

$q(y)$	$y$ の範囲	変換	$k$
$(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)$	$0 < y < b < a$	$y = bz$	$\frac{b}{a}$
$(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)$	$b < a < y$	$y = \frac{a}{z}$	$\frac{a}{b}$
$(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)$	$b < y < a$	$y^2 = a^2 - (a^2 - b^2)z^2$	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
$(a^2 + y^2)(b^2 - y^2)$	$0 < y < b$	$y^2 = b^2(1 - z^2)$	$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
$(y^2 + a^2)(y^2 - b^2)$	$b < y$	$y^2 = \frac{b^2}{1 - z^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
$(y^2 + a^2)(y^2 + b^2)$	$b < a$	$y^2 = \frac{b^2 z^2}{1 - z^2}$	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

の6通りに場合分けして,  $y = bz$ ,  $y = \frac{a}{z}$  などの変換を適用する. 楕円積分を標準形に直す方法は一通りではなく, 変換の取り方によって母数の異なる複数の標準形が得られる.

## 2.4 楕円積分と楕円関数小史

楕円積分は17世紀, ウォリスにより計算され, その後ベルヌーイらによっても扱われた<sup>8</sup>. 本格的な研究は楕円等の弧長に関するファニャノの論文, オイラーによる加法定理の発見に続く, ラグランジュ等18世紀後半の多くの数学者の努力によって進展し, ルジャンドルによって大成した(1825年)<sup>9</sup>. その直後アーベルとヤコビは, 楕円積分の表す関数の逆関数を考えると, より見通しのよい理論が建設されることを発見した<sup>10</sup>. それが楕円関数の理論である. ガウスはこれより前に, 同じような思想に到達していたが発表しなかった. 積分  $\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ,  $0 \leq c \leq 1$  を上端  $c$  の関数と考えた関数の逆関数(レムニスケート関数)について研究し, 加法公式等を得た. これは楕円関数の特殊な場合であるが, アーベル, ヤコビの仕事に先がけている[4, p. 3].

ガウスは1799年5月30日に(本稿の冒頭に紹介した)日記に書いた翌年5月6日, 一般楕円関数を発見し, 6月にはモジュラー関数を発見(少なくともその端緒を確実に把握するに至った). ガウスはこれらの発見に関して, 生前に発表するところなくして終わった. ガウスは, 第1部「超幾何級数」, 第2部「算術幾何平均およびモジュラー関数」, 第3部「楕円関数」を総括する大著述を計画していた. これは, ガウス全集の再版の編纂者であるシュレジンガーの想像である. アーベルの楕円関数論がCrelle誌で発表された後に, ガウスがベッセルに書いた手紙の中に, 上記著述の3分の1ほどは不用に帰したと言っている[5].

各時代の数学研究を代表する数学者たちはたいいみな楕円関数論の形成に貢献した. ここでは, 高瀬正仁の論文に従って, 4つの時代に分けて楕円関数論をヨーロッパ近代の数学の流れに沿って解説する[6].

- ライブニッツとベルヌーイ兄弟の時代: さまざまな曲線の形状が究明された. 接線をひく, 曲率の計算, 弧長の計算, 曲線で囲まれる領域の面積の計算などである. ベルヌーイ兄弟の無限解析にはレムニスケートの弧長を表示する積分が現れている. 楕円と双曲線の弧長積分は楕円積分になる.
- オイラーとラグランジュの時代: オイラーは  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$  という形の微分方程式の代数的積分に行き詰まったが, ファニャノの論文に示唆を受けて打開した. さらにより一般的に  $P(x)$  を  $x$  の4次多項式としたとき  $\frac{dx}{P(x)} = \frac{dy}{P(y)}$  の形の微分方程式の代数的積分に成功した. 特に加法定

<sup>8</sup>J. Wallice (1616–1703) はイギリスの数学者で, J(ヤコブ). Beroulli (1654–1705) と J(ヨハン). Beroulli (1667–1748) の兄弟はスイスの数学者で, オイラーはヨハンに師事した.

<sup>9</sup>G. C. Fagnano (1682–1766) はイタリアの数学者, L. Euler (1707–1783) はスイスの数学者, J. L. Lagrange (1736–1813), A. M. Legendre (1752–1833) はフランスの数学者である.

<sup>10</sup>N. H. Abel (1802–1829) はノルウェーの数学者, C. G. Jacobi (1804–1860) はドイツの数学者である.



理の発見は顕著である。アーベルはオイラーの発見をもって、今日の楕円関数論の始まりを発表した。ラグランジュはオイラーが踏み出した一步の意味合いを理解して、大きく展開した。ルジャンドルはオイラーが遺した大量の諸論文と諸著作を集大成して浩瀚な報告書を作成した。『さまざまな位数の超越物と求積法に関する積分計算演習』はその1つである。

- アーベルとヤコビの時代：19世紀の初め、ほぼ同時代にアーベルとヤコビが現れて、楕円関数論に新生面が開かれた。ヤコビはオイラーとラグランジュの理論を継承するところから出発した。上述したテキストを通じてオイラーの楕円関数論を学び、そこで試みられていたルジャンドルの変換理論の延長線上に、ヤコビの楕円関数論を作った。アーベルはガウスが語ったかすかな示唆を感知して、ガウスのアイデアに形を与えようとしたが、ガウスにはまとまった著作がない。そのためアーベルは試作を表現する手段をルジャンドルに借りた。ヤコビはアーベルの理論の本領を理解し、早世したアーベルの数学的意図を大きく延長し「ヤコビの逆問題」を発見した。
- リーマンとワイエルシュトラスの時代：解析性と二重周期性に着目して、楕円関数の基礎付けを行った<sup>11</sup>。

本稿で紹介する算術幾何平均法も、楕円関数を用いて導くほうが簡潔かもしれない。しかし、楕円関数の理論は、数学科でも2年生以降のカリキュラムであり、工学部では教えない。このため本稿では、大学受験の数学の延長で理解できる範囲の完全楕円積分を解説し、プログラミングを含めて計算を通して、ガウスの公式を解説する。

### 3 完全楕円積分の算術幾何平均法による計算

完全楕円積分の原始関数は  $k = 0$  と  $k = 1$  の場合を除いて、初等関数では表わされないのが、古来、特別な計算方法が研究されてきた。

図3に第1種、第2種の完全楕円積分のグラフを示す。 $K(k)$  は  $K(0) = \frac{\pi}{2}$  で、 $k$  の増加とともに単調に増加し、 $k = 1$  の近傍で急激に大きくなり、 $K(1) = \infty$  となる。 $E(k)$  はやはり  $E(0) = \frac{\pi}{2}$  で、 $k$  の増加とともに単調に減少し、 $E(1) = 1$  となる。

#### 3.1 項別積分と区分求積法

級数展開して項別に積分する方法も、数値積分による方法も、第1種は  $k = 1$  の近傍で急激に大きくなるのでかなり厄介な計算になる。

##### 3.1.1 第1種完全楕円積分のべき級数展開による計算

べき級数<sup>12</sup>

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

の収束半径は1なので、 $|k| < 1$  のとき、式(11)の被積分関数は次のような一様収束級数で表される。

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \theta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 \theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \sin^6 \theta + \dots$$

<sup>11</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826年9月17日 - 1866年7月20日)とKarl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815年10月31日 - 1897年2月19日)はドイツの数学者。

<sup>12</sup>テイラー展開より  $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4! \cdot 2^4}x^4 + \dots$

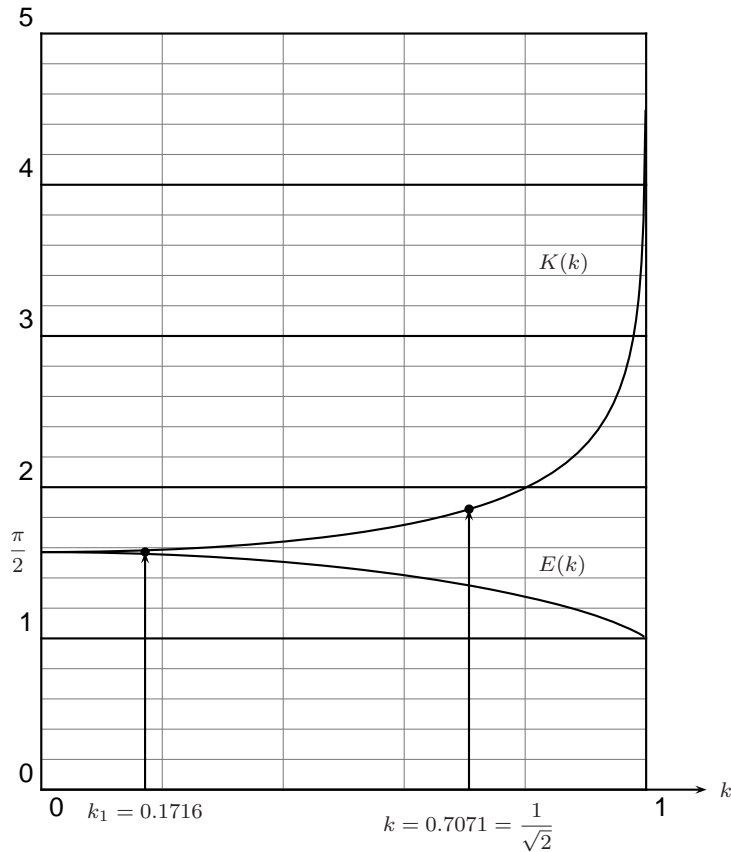


図 3: 完全楕円積分の第 1 種  $K(k)$  と第 2 種  $E(k)$

よって、この右辺の級数を項別に積分して積分公式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

を用いると、 $K(k)$  は次のようにべき級数展開される。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\right)^2 k^{2r} + \cdots \right) \quad (21)$$

ただし  $(2r-1)!! = (2r-1)(2r-3)\cdots 3 \cdot 1$  また、 $(2r)!! = (2r)(2r-2)\cdots 4 \cdot 2$  とする。

$E(k)$  については<sup>13</sup>,

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots$$

に  $x = k^2 \sin^2 \theta$  を代入して項別積分すれば、

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \cdots - \left(\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\right)^2 \frac{k^{2r}}{2r-1} - \cdots \right) \quad (22)$$

が得られる。

この級数の収束は  $|k|$  が小さいときは良好であるが、1 に近づくと遅くなる。実際に  $K(k)$  を計算してみよう。

<sup>13</sup>テイラー展開より  $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2! \cdot 2^2}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4! \cdot 2^4}x^4 + \cdots$

```

OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
INPUT PROMPT "k=":k           ! 母数 k を入力
LET e11=Elip1(k)             ! 精度の高い K(k) の値が e11 に返る
PRINT "K(";k;")=";e11
LET s = 1
LET num=1
LET den=1
LET x=1
LET i=0
DO UNTIL ABS(e11-s*PI/2) < 0.0001
  LET i=i+1                   ! i num den x r
  LET num=num*(2*i-1)^2      !-----
  LET den=den*(2*i)^2        ! 1 1 2^2 k^2 1/4
  LET x=x*k^2                ! 2 3^2 4^2 k^4 9/16
  LET r=num/den              ! 3 5^2 6^2 k^6 25/36
  LET s=s+r*x                ! 4 7^2 8^2 k^8 49/64
  PRINT i+1;s*PI/2;ABS(e11-s*PI/2)
LOOP
END

```

Elip1 関数は  $K(k)$  を ( 十分高い精度で ) 変数 e11 に返す関数で , プログラムは後述する . DO UNTIL 構文は , 条件  $ABS(e11-s*PI/2)$  が 0.0001 より小さくなるまで反復を繰り返す . ここでは精度が 10000 分の 1 を使う . この精度を得るのに必要な反復回数は次の表の通りである .

$k$	4 桁の精度を得るのに必要な項数	$K(k)$
0.1	2	1.57474556151735
0.2	3	1.58686784745471
0.3	4	1.60804861993051
0.4	4	1.63999986586451
0.5	6	1.68575035481259
0.6	7	1.75075380291575
0.7	10	1.84569399837472
0.8	16	1.99530277766473
0.9	32	2.28054913842277

この方法では ,  $k$  が 1 に近い領域で , 筆算で計算することは手間がかかりすぎる事が分かる .

### 3.1.2 第 1 種完全楕円積分の区分求積法による計算

区分求積法には , 分点や代表点のとりかたによりいろいろな公式がある . 高校の教科書『数学 B』には , 台形則が載っていた [7] . ここではそれよりも精度的に有利なシンプソンの公式を使う . 古典的教科書から , シンプソン公式 (  $2n$  分割した  $\frac{1}{3}$  則による公式 ) を筆算で行い  $\pi$  を計算する例を引用する [8, p. 128] .

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \text{ を使って , } \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ より , } \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{ から } \pi \text{ を求める . } n = 5 \text{ と } h = 0.1$$

とする<sup>14</sup> .

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)) \\ &= \frac{0.1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{1}{1.04} + \frac{1}{1.16} + \frac{1}{1.36} + \frac{1}{1.64} \right) + 4 \left( \frac{1}{1.01} + \frac{1}{1.09} + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.49} + \frac{1}{1.81} \right) \right) \end{aligned}$$

から  $\pi \approx 3.14159288$  が得られる . 下線部は正しく , 正確な  $\pi$  は次の 88 が 65 である .

完全楕円積分の第 1 種  $K(k)$  の定積分を , シンプソン則を使った区分求積法で計算してみよう .

Elip1Int.BAS

```

INPUT PROMPT "k,n=":k,n
LET r=simpson1(n,k)
PRINT USING "#.####":r
PRINT r
END
EXTERNAL FUNCTION simpson1(n,k)
DEF f(x)=1/SQR(1-(k*SIN(x))^2)
LET h=(PI*0.5)/n
LET s=0
FOR j=1 TO n
  LET s=s+f(h*(j-1))+4*f(h*(j-0.5))+f(h*j)
NEXT j
LET simpson1=s*h/6
END FUNCTION

```

$k$  が小さければ , 関数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (k \sin \theta)^2}}$  はなだらかで , 分割数が少なくても高い精度で計算可能である .  $k = 0.1$  では  $n = 1$  でも 6 桁の精度を得られる . しかし  $k = 0.9$  では 6 桁の精度を得るには ,  $n = 7$  を与える必要がある . 次表は , Elip1IntTex.BAS で作成した , 6 桁の精度を得るのに必要な区間の数である ..

$k$	$r$	$n$	$ r - K(k) $
.1	1.57474	2	.00000
.2	1.58687	3	.00000
.3	1.60805	3	.00000
.4	1.64000	3	.00000
.5	1.68574	3	.00001
.6	1.75075	4	.00000
.7	1.84569	4	.00001
.8	1.99530	5	.00000
.9	2.28055	7	.00000

このように , 第 1 種完全楕円積分の計算は , 母数が小さければ , 項別積分でも , 区分求積法でも収束が速いが , 母数が 1 に近づくにつれて収束は遅くなる . このことから , 筆算では母数の大きな  $K(k)$  の計算が , 項別積分でも区分求積法でも厳しいことが分かる .

<sup>14</sup>  $f(a) = y_0, f(a+h) = y_1, f(a+2h) = y_2, \dots, f(a+jh) = y_j$  のように置くと ,

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 \\ &\quad + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots \end{aligned}$$

となるので , 最初と最後の項は 1 倍 , 偶数番目の項は 4 倍 , 奇数番目の項は 2 倍される .

### 3.2 関連する積分と母数・補母数の関係式

算術幾何平均法の準備として、 $K(k)$  と  $E(k)$  に関連して次の積分を定義する。

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (23)$$

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (24)$$

これらの積分は  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  によって変形することで、完全楕円積分と次の関係がある。

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K(k) \quad (25)$$

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE(k) \quad (26)$$

母数  $k$ 、補母数  $k'$  の間には次の関係がある。

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad k = \sqrt{1 - k'^2} \quad (27)$$

したがって  $k = k'$  となる母数は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  である。

母数  $k$  と補母数  $k'$  は  $a, b$  に置換えられる。変数  $k, k', a, b$  の間には多くの恒等式が成立する。ここで、本資料で使用するものを掲げる。母数は、第 2 種楕円積分では楕円の離心率で、式 (6) である。

$$k' = \frac{b}{a}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (28)$$

式 (27) を 2 乗して式 (28) を代入して

$$\frac{1}{1 + k'} = \frac{a}{a + b}, \quad \frac{k'}{1 + k'} = \frac{b}{a + b} \quad (29)$$

を得る。

算術幾何平均  $a_1 = \frac{a + b}{2}$ 、 $b_1 = \sqrt{ab}$  に関して、母数  $k$ 、補母数  $k'$ 、 $a_1, b_1$  の相互に

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1} \quad (30)$$

$$k'_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b}, \quad 1 + k' = \frac{2}{1 + k_1}, \quad \frac{2}{1 + k'} = \frac{2a}{a + b} = \frac{a}{a_1} \quad (31)$$

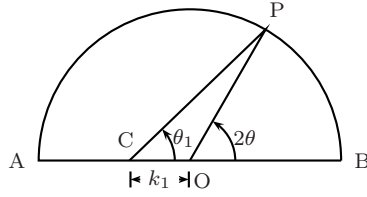
の関係がある。式 (30) 右の  $k'$  に  $\sqrt{1 - k^2}$  を代入して、両辺を 2 乗して 1 を移項して開平すれば、

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1} \quad (32)$$

を得る。

### 3.3 ランデン変換と算術幾何平均法

図 4 に示すように、半径 1 の円  $O$  の 1 つの直径を  $AB$  とし、 $OA$  上に  $OC = k_1$  となる点  $C$  をとる。円周上の動点  $P$  に対し、 $\angle BOP = 2\theta$ 、 $\angle BCP = \theta_1$  とする。 $\angle POC = \pi - 2\theta$  で、 $\angle OPC = 2\theta - \theta_1$  であ



$$\begin{aligned}\angle OPC &= 2\theta - \theta_1 \\ \frac{1}{\sin \theta_1} &= \frac{k_1}{\sin(2\theta - \theta_1)} \\ PC &= k_1 \cos \theta_1 + \cos(2\theta - \theta_1) \\ PC^2 &= 1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\theta\end{aligned}$$

図 4: ランデン変換 ( $\angle OPC$ , 正弦定理, 第 1, 第 2 余弦定理)

る.  $\triangle POC$  に正弦定理を適用すると,  $\frac{1}{\sin \theta_1} = \frac{k_1}{\sin(2\theta - \theta_1)}$  なので

$$\sin(2\theta - \theta_1) = k_1 \sin \theta_1 \quad (33)$$

が得られる.  $PC$  の長さを 2 通りに表わす. まず,  $\triangle POC$  に第 1 余弦定理を適用すると

$$PC = k_1 \cos \theta_1 + \cos(2\theta - \theta_1) \quad (34)$$

である. 次に第 2 余弦定理を適用すると  $PC^2 = 1 + k_1^2 - 2k_1 \cos(\pi - 2\theta)$  より<sup>15</sup>

$$PC^2 = 1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\theta \quad (35)$$

が得られる.  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$  を代入して  $1 + k_1^2 + 2k_1(1 - 2\sin^2 \theta) = 1 + 2k_1 + k_1^2 - 4k_1 \sin^2 \theta$  となるが,  $4k_1$  に式 (32) を 2 乗して得られる  $4k_1 = (1 + k_1)^2 k^2$  を代入して次式を得る.

$$\cos(2\theta - \theta_1) + k_1 \cos \theta_1 = (1 + k_1) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (36)$$

式 (33) の両辺の微分をとると,  $\cos(2\theta - \theta_1)(2d\theta - d\theta_1) = k_1 \cos \theta_1 d\theta_1$  より 次式を得る.

$$\frac{d\theta}{k_1 \cos \theta_1 + \cos(2\theta - \theta_1)} = \frac{d\theta_1}{2 \cos(2\theta - \theta_1)} \quad (37)$$

左辺の分母に式 (36), 右辺の分母に式 (33) の両辺を 2 乗して移項して開平して得られる  $\cos(2\theta - \theta_1) = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}$  を用いて変形すると

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1 + k_1}{2} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (38)$$

を得る. 積分をとると

$$\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1 + k_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (39)$$

が得られる. 式 (30) の  $k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$  とおくと  $k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1}$  であるが, これを用いて

$$F(\varphi_1, k_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} = (1 + k') \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = (1 + k') F(\varphi, k) \quad (40)$$

この変換をランデン変換 (Landen's transformation) という<sup>16</sup>. 完全楕円積分の計算において, 母数を増減させる恒等式である.

<sup>15</sup>  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  が第 2 余弦定理である.

<sup>16</sup> J.Landen (1719-1790) はイギリスの幾何学者で, 1780 年にこの変換公式を発表した. 彼は, 双曲線の弧長も, 楕円の 2 つの弧を用いて測定可能であることも示した [6].

### 3.3.1 完全楕円積分のランデン変換

ランデン変換の式 (39) で  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_1 = \pi$  の場合を考える．被積分関数は  $[0, \pi]$  で,  $\frac{\pi}{2}$  に関して対称なので,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}} = \frac{2}{1 + k_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (41)$$

となり, 積分範囲の違いから係数が変わる． $K(k)$  で書くと

$$K(k) = (1 + k_1)K(k_1) \quad (42)$$

である．これは母数  $k$  の完全楕円積分  $K(k)$  が,  $k$  よりも小さな母数  $k_1$  の  $1 + k_1$  倍に置き換えられることを意味している．具体的に  $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\dots$  に対して計算すると<sup>17</sup>,  $k_1 = 0.17157\dots$  であり,

$$\underbrace{K(k)}_{1.85407} = \underbrace{(1 + k_1)}_{1.17157} \underbrace{K(k_1)}_{1.58255} \quad (43)$$

が得られる．図 3 のグラフにこれを記入した．

以上をまとめると, ランデンの変換式 (42) に式 (31) より得られる  $1 + k_1 = \frac{a}{a_1}$  を代入すると

$$\frac{1}{a}K(k) = \frac{1}{a_1}K(k_1)$$

が得られる．式 (23) の  $I(a, b)$  で記述すると, 式 (25) の  $I(a, b) = \frac{1}{a}K(k)$  と  $I(a_1, b_1) = \frac{1}{a_1}K(k_1)$  より

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a, b) \quad (44)$$

と書ける．ランデン変換は完全楕円積分第 1 種のパラメータ  $a, b$  を, その算術平均と幾何平均に置き換える恒等式である．積分形で書くと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta_1 + b_1^2 \sin^2 \theta_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad (45)$$

である．

母数を小さくできるので, 収束に有利な母数に移して (項別積分でも, 区分求積法でも) 計算することを可能とした．

### 3.3.2 第 1 種完全楕円積分の算術幾何平均法

ランデン変換による  $a, b$  の置換えは再帰的にできるので,  $k = k_0$  において,

$$k_j = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{j-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{j-1}^2}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (46)$$

<sup>17</sup> $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$  のとき,  $\frac{a-b}{a+b} = 0.17157\dots$

なる母数の数列を作れば

$$\begin{aligned}
 K(k) &= (1+k_1) \underbrace{K(k_1)} \\
 &= (1+k_1) \underbrace{(1+k_2)K(k_2)} \\
 &= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)K(k_3) \\
 &= \dots \\
 &= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\dots(1+k_n)K(k_n)
 \end{aligned}$$

が成立する． $k_n \rightarrow 0$  と見なせば  $K(k_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  となるので，十分に  $k_n$  が 0 に近づいたら

$$K(k) \doteq \frac{\pi}{2} \underbrace{(1+k_1)}_{1.17157} \underbrace{(1+k_2)}_{1.00747} \underbrace{(1+k_3)}_{1.000014} \dots (1+k_n) \quad (47)$$

が成立する．アンダープレースを付して示した数は  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合である．これは次のプログラムで確認できる（外部関数 Elip1 は後述する）．

```

AGM.BAS
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET k= 1/SQR(2)
Elip1k=Elip1(k)
PRINT "K(";k;")=";Elip1k
LET t= 1
FOR i=1 TO 5
  LET k=(1-SQR(1-k^2))/(1+SQR(1-k^2))
  LET t=t*(1+k)
  PRINT "1+k=";1+k;"t=";t;t*PI/2-Elip1k
NEXT i
END

```

$1+k_i$  は 1 に 2 次収束する．AGM.BAS を L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の出力用に改訂した AGMTeX.BAS を実行して，表示窓 AGMTeX.TXT の 6 行をコピー&ペーストして示す．

```

K(.7071068) = 1.8540747
1+k1 = 1.171572875254 , t = 1.171572875 , diff = -1.3772E - 000002
1+k2 = 1.007469666730 , t = 1.180324134 , diff = -2.5863E - 000005
1+k3 = 1.000013949369 , t = 1.180340599 , diff = -9.0194E - 000011
1+k4 = 1.000000000049 , t = 1.180340599 , diff = -1.0969E - 000021
1+k5 = 1.000000000000 , t = 1.180340599 , diff = -1.6223E - 000043

```

収束は速く，3 回の反復で 11 桁の精度，5 回で 43 桁の精度が得られる．

$K(k)$  の計算では，母数  $k$  を小さくする恒等式の発見が，計算の手間を少なくした．しかもこの恒等式は，算術平均（足して 2 で割る）と幾何平均（掛けて平方根を開平する）だけでできるので，複雑で原始関数も求められない定積分の計算を，非常に簡単にできた．

$a$  と  $b$  をその算術平均  $a_1$  と幾何平均  $b_1$  に置き換える操作を繰り返し適用して，極限を考えると

$$K(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 \cos^2 \theta + M^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2M}$$

つまり，数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  を必要な桁数まで求めて  $\frac{\pi}{2a_n}$  で近似するのが，算術幾何平均法である．前項で示した AGM.BAS で呼び出す関数 Elip1 を示す．



```

EXTERNAL FUNCTION Elip1(k)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET a=1
LET b=SQR(1-k^2)
DO UNTIL a-b<10^(-900)
  LET y=a
  LET a=(a+b)/2
  LET b=SQR(b*y)
LOOP
LET Elip1=PI/(2*a)
END FUNCTION
    
```

ここでは十進 BASIC の 1000 桁モードを使用して、収束判定値を充分小さな  $10^{-900}$  にして計算した（900 桁の精度がある）。

### 3.3.3 第 2 種完全楕円積分の算術幾何平均法

$a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{ab}$  と置いたとき,  $J(a_1, b_1)$  と  $J(a, b)$  の関係を調べよう.  $J(a_1, b_1) = a_1 E(k_1)$  の  $a_1$  と  $b_1$  を  $a, b$  で書き直す.  $k_1$  には式 (30) の  $k_1 = \frac{a-b}{a+b}$  を用いる.

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2} E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \quad (48)$$

である. したがって,  $J(a, b) = aE(k)$  と  $I(a, b) = \frac{1}{a}K(k)$  に注意すれば, 第 1 種と第 2 種の間係を有する公式 [9, p. 228]

$$E(k) = (1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - k'K(k) \quad (49)$$

を用いて  $2J(a_1, b_1) - J(a, b)$  を求める.

$$\begin{aligned}
 2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a, b) &= (a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) - aE(k) \\
 &= (a+b)E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - aE(k) \\
 &= (a+b)\left(\frac{1}{1+k'}E(k) + \frac{k'}{1+k'}K(k)\right) - aE(k) \\
 &= (a+b)\left(\frac{a}{a+b}E(k) + \frac{b}{a+b}K(k)\right) - aE(k) \\
 &= bK(k) = abI(a, b)
 \end{aligned}$$

これより第 1 種完全楕円積分との関係

$$2J(a_1, b_1) - J(a, b) = abI(a, b) \quad (50)$$

が得られた.

$$\begin{aligned}
 c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 \text{ とおけば } c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 &= \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4} \text{ より,} \\
 c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} &= \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \quad (51)
 \end{aligned}$$

である．ここで  $A_n = 2^n(J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n))$  とおく． $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a, b) = abI(a, b)$  と  $I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a, b)$  より，

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= 2^n \overbrace{(2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n))}^{a_n b_n I(a_n, b_n)} - 2^{n+1} a_{n+1}^2 \overbrace{I(a_{n+1}, b_{n+1})}^{I(a_n, b_n)} + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n) \\ &= 2^n a_n b_n I(a_n, b_n) - 2^{n+1} a_{n+1}^2 I(a_n, b_n) + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n) \\ &= 2^{n-1} (2a_n b_n - (a_n + b_n)^2 + 2a_n^2) I(a_n, b_n) \\ &= 2^{n-1} (a_n^2 - b_n^2) I(a_n, b_n) = 2^{n-1} c_n^2 I(a, b) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} -2^{-n} A_n &= a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 - a_n^2 \cos^2 \theta - b_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2) \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta \leq c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta = c_n^2 I(a_n, b_n) \end{aligned}$$

したがって， $0 < -A_n \leq 2^n c_n^2 I(a_n, b_n) = 2^n c_n^2 I(a, b)$  である． $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n^2 = 0$  が成立するので<sup>18</sup>

$$A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{N+1} = 0 \quad (52)$$

これから

$$\begin{aligned} J(a, b) - a^2 I(a, b) &= A_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a, b) \\ &= -I(a, b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \end{aligned} \quad (53)$$

これを移項して

$$J(a, b) = \left( a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a, b) \quad (54)$$

によって計算される．完全楕円積分第 2 種  $E(k)$  を，第 1 種  $K(k)$  から求めるには

$$E(k) = \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) K(k) \quad (55)$$

<sup>18</sup> $n \geq 1$  のとき，式 (51) が成立している． $a_{n-1} > b_{n-1} > b$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  である．特にある番号  $n_0$  が存在して， $n > n_0$  ならば  $c_n$  は  $b$  より小さく  $0 < c_n < b$  である．よって， $n > n_0$  のとき， $0 < \frac{c_n}{b} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2b} = \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} = \frac{c_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} < \frac{1}{4} \left( \frac{c_{n-1}}{b} \right)^2$  である (最後の  $<$  は  $a_{n-1} > b_{n-1} > b$  より  $2b < a_{n-1} + b_{n-1}$  から導かれる)．これによって数列  $\{c_n\}$  が  $\frac{1}{4}$  のべきで抑えられるので  $0 < c_{n_0+m} < b \left( \frac{1}{4} \right)^{1+2+\dots+2^{m-1}} \left( \frac{c_{n_0}}{b} \right)^{2^m} < b \left( \frac{1}{4} \right)^{2^m} = \frac{b}{2^{2^{m+1}}}$  によって  $0 < 2^{n_0+m} c_{n_0+m}^2 < b^2 \frac{2^{n_0+m}}{2^{2^{m+1}}} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n^2 = 0$  が成立する [10]．

母数  $k$  を与えられたら,  $K(k)$  と  $E(k)$  を 700 桁の精度で計算して返すサブルーチン `elip12` を作る (後述する `LegRelation.BAS`) .

————— `LegRelation.BAS` の `Elip12` サブルーチン —————

```
EXTERNAL SUB elip12(k,elip1,elip2)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET a=1
LET j=0
LET b=SQR(1-k^2)
LET t=1-(a^2-b^2)*0.5
DO UNTIL a-b<10^(-700)
  LET j=j+1
  LET y=a
  LET a=(a+b)/2
  LET b=SQR(b*y)
  LET t=t-2^(j-1)*(a^2-b^2)
LOOP
LET elip1=PI/(2*a)
LET elip2=PI/(2*a)*t
END SUB
```

## 4 ルジャンドルの関係式

$K(k)$  と  $E(k)$  の間には次のルジャンドルの関係式 (Legendre relation) と呼ばれる恒等式が成立する .

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2} \quad (56)$$

この関係式は次のようにして導かれる .

### 4.1 完全楕円積分の導関数

完全楕円積分の導関数を完全楕円積分で表す .

$$\frac{dK}{dk} = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}} d\theta = \frac{1}{kk'^2} (E - k'^2 K) \quad (57)$$

$$\frac{dE}{dk} = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} d\theta = \frac{1}{k} (E - K) \quad (58)$$

$E$  については  $\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} d\theta = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \theta) - 1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} d\theta$  から得られる .

$K$  については複雑だが,  $E - k'^2 K = k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} d\theta$  を用い, 次式

$$\frac{k'^2 \sin^2 \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} - \frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}$$

を確かめた上で, これを  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  で積分することで

$$k'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)}} d\theta$$

によって確かめられる [11, p. 74] .

## 4.2 定数になること

ここで  $K' = K(k')$ ,  $E' = E(k')$  と書くことにする. これらの補母数  $k'$  に関する微分は,  $k$  を  $k'$  で,  $k'$  を  $k$  で置換えることで得られる.

$$\frac{dK'}{dk'} = \frac{1}{k^2 k'} (E' - k^2 K'), \quad \frac{dE'}{dk'} = \frac{1}{k'} (E' - K') \quad (59)$$

したがって  $K'$  と  $E'$  の  $k$  に関する微分は,  $\frac{dE'}{dk} = \frac{dE'}{dk'} \frac{dk'}{dk} = \frac{E' - K'}{k'} \left(-\frac{k}{k'}\right)$  より

$$\frac{dK'}{dk} = \frac{1}{k k'^2} (k^2 K' - E'), \quad \frac{dE'}{dk} = \frac{k}{k'^2} (K' - E') \quad (60)$$

として得られる. 式 (57), (58), (60) から,

$$\frac{d}{dk} (EK' + E'K - KK') = 0$$

が得られ,  $(EK' + E'K - KK')$  が定数であることが分かる.

## 4.3 定数の値

$k$  を 0.1 から 0.9 まで 0.1 刻みで計算して,  $(EK' + E'K - KK') - \frac{\pi}{2}$  を表示する.

— LegRelation.BAS —

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
FOR k=0.1 TO 0.9 STEP 0.1
  CALL elip12(k,kk,ee)
  LET d=SQR(1-k^2)
  CALL elip12(d,kd,ed)
  PRINT USING "---%.#####^0000":ee*kd+ed*kk-kk*kd-PI*0.5
NEXT k
END
```

実行すると次の表示を得た.

```
-1.263668E-819
-5.375704E-735
-6.901283E-855
-4.113722E-971
-1.433276E-893
-4.582045E-796
-6.659445E-705
-4.582045E-796
-9.457629E-963
```

これから  $EK' + E'K - KK'$  が  $\frac{\pi}{2}$  であることは間違いなさそうだ. 定数であるから, 正確に計算できる  $k \rightarrow 0$  で考える.

$$\lim_{k \rightarrow 0} E = \lim_{k \rightarrow 0} K = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} E' = 1$$

なので, 残る

$$\lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' = 0$$

を示せばよい。  $\lim_{k \rightarrow 0} (E - K) \rightarrow 0$  と零へ収束する。一方  $\lim_{k \rightarrow 0} K' = \lim_{k \rightarrow 1} K \rightarrow \infty$  と発散する。零に収束する  $\lim_{k \rightarrow 0} (E - K)$  と発散する  $\lim_{k \rightarrow 0} K'$  の積でどちらが強いかの問題である。楕円関数の教科書では、ヤコビの楕円関数である sn 関数を用いて証明しているが [4], [11], ここではべき級数展開から導く。

$K(k)$  のべき級数展開式 (21) と  $E(k)$  の展開式 (22) を比較すると、 $k^2$  の項まで一致しているので、 $E - K$  は  $k^4$  の項から始まる。

$$K(k) - E(k) = \frac{\pi}{2} \left( \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{4}{3} k^4 + \dots + \left( \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \right)^2 \frac{2r}{2r-1} k^{2r} + \dots \right)$$

一方、 $k$  が正で小さな値をとるとき、

$$0 < K(k') \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{k^2}} d\theta = \frac{\pi}{2k}$$

なので、 $K(k')$  は  $\frac{\pi}{2k}$  で抑えられる。したがって

$$\lim_{k \rightarrow 0} (E(k) - K(k))K(k') = \lim_{k \rightarrow 0} O(k^4)K(k') = 0$$

で、零へ収束する。以上により、 $(EK' + E'K - KK')$  の第 1 項と第 3 項は零に収束し、第 2 項が残り、定数が  $\frac{\pi}{2}$  であることが確かめられた。

## 5 ガウスの公式

ルジャンドルの関係式 (56) に、 $a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  とおけば、 $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$  である。このとき式 (56) を  $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = E$  のように簡略化して示すと

$$2EK - K^2 = \frac{\pi}{2} \tag{61}$$

と書ける。 $T = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2$  と置くと  $E$  と  $K$  の関係式 (55) は  $E = TK$  と書くことができる。これを式 (61) に代入すると  $2TK^2 - K^2 = \frac{\pi}{2}$  なので<sup>19</sup>

$$\left(1 - \sum 2^n c_n^2\right) K^2 = \frac{\pi}{2} \tag{62}$$

式 (3.3.2) の  $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合、 $M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = M$  と書くと、 $K = \frac{\pi}{2M}$  より  $\left(1 - \sum 2^n c_n^2\right) \frac{\pi^2}{4M} = \frac{\pi}{2}$  より次のガウスの公式を得る。

$$\pi = \frac{2M^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2} \tag{63}$$

これを BASIC でプログラミングする (1 章の Gauss.BAS とは、精度で収束を判定するところが異なる)。

```
INPUT epsn      ! GaussLeg.BAS
LET a=1
LET b=1/SQR(2)
LET t=1/4
```

<sup>19</sup> $2T - 1 = (2 - \sum 2^n c_n^2) - 1 = 1 - \sum 2^n c_n^2$

```

LET x=1
LET p=(a+b)^2
LET i=0
PRINT i;p;p-PI
DO UNTIL ABS(p-PI) < 0.1^epsn
  LET y=a
  LET a=(a+b)/2
  LET b=SQR(b*y)
  LET t=t-x*(y-a)^2
  LET x=2*x
  LET p=(a+b)^2/(4*t)
  LET i=i+1
  PRINT i;p;p-PI
LOOP
END

```

BASIC の保有する  $\pi$  の値との差の絶対値が  $10^{-\epsilon}$  になるまで反復する ( $\epsilon$  は input epsn で与える)。  
 epsn=10 を与えると 3 回で、100 を与えても 6 回で収束する (2 次収束)。

# 付 録

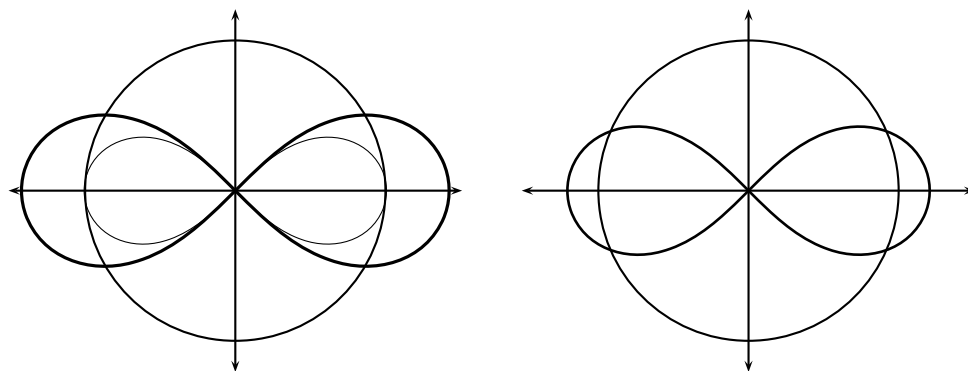


図 5: 円と式 (64) と式 (65) による  $a = 1$  のレムニスケート (左) と円周と等しい弧長をもつレムニスケート (右)

## A レムニスケート曲線とその作画

ガウスは算術幾何平均を使用してレムニスケート曲線の弧長を計算するとき、ガウスの公式を見つけた。この曲線は 17 世紀、18 世紀の数学者によく解析されたが、円、楕円、双曲線などの 2 次曲線に次いで研究された曲線の 1 つである。その理由はこの曲線が特別の特長を複数持っているからと思われる。そこで付録として、実際にこの曲線を  $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$  の PSTricks パッケージを使用して描きながら、数学的特長を探ってみたい。

### A.1 レムニスケート曲線の定義

一般用語で「レムニスケート」lemniscate と呼ばれる曲線は複数あるようだ。語源はラテン語 LEMNISCUS が「リボンで飾られた」の意があり、リボンのような形で、数学記号の無限大  $\infty$  の形をしている (図 5)。日本語では「連珠形」(れんじゅけい) と訳される<sup>20</sup>。17, 18 世紀に多くの数学者の研究対象となったベルヌーイのレムニスケートは、極座標系で

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (64)$$

または

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (65)$$

によって表される<sup>21</sup>。本稿では、双曲線との位置関係の説明では式 (65) を用いるが、その他は式 (64) を用いる。

直角座標系へは、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおき、

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 - y^2 = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \cos 2\theta \quad (66)$$

より  $x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{r^2}(x^2 - y^2)$  が得られ、両辺を  $r^2$  倍して

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (67)$$

が得られる。変数  $x, y$  に関して 4 次の陰関数である。

<sup>20</sup>連珠は「珠をつなぎつらねること、また、そのつないだ珠」(広辞苑)。

<sup>21</sup>図 6 の左も「リボンのような形」なので、一般用語でレムニスケートになるらしい。この曲線は  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin 2\theta$  で描いているので、高校の『数学 C』のリサーージュ (lissajous)  $x = \sin \theta$ ,  $y = \sin 2\theta$  と同じ曲線である [12]。



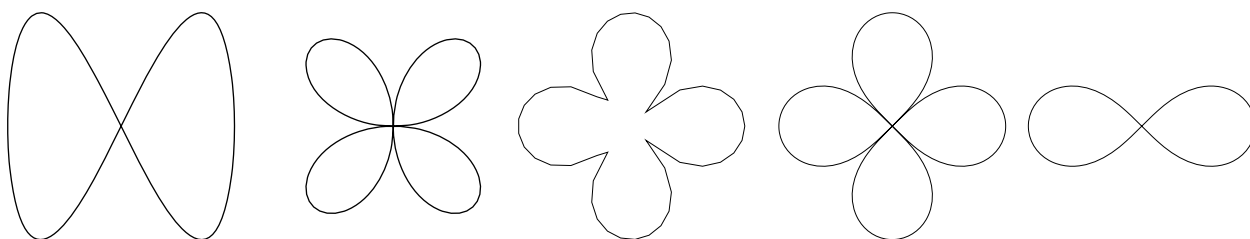


図 6: 種々の曲線と尖点

レムニスケートは「曲線上の点と焦点との距離と、もう一方の焦点との距離の積が一定」で定義される<sup>22</sup>。

2点からの距離の積が一定の点の軌跡をカッシーニの卵形線 (Cassinian oval) という。 $(-b, 0)$  と  $(b, 0)$  からの距離の積が  $a^2$  である点  $P$  の軌跡は、ピタゴラスの定理を用いて

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\sqrt{(x-b)^2+y^2}=a^2 \quad (68)$$

で表される。ここで  $a=b$  の場合、両辺を2乗すると式(67)が得られる。ベルヌーイのレムニスケート曲線は、カッシーニの卵形線の特例である。曲線は、原点  $O$  と  $\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a$  で  $x$  軸と交わる。点  $(\pm a, 0)$  をレムニスケートの焦点という。

極座標系での作図 式(65)なら  $a=1$ 、式(64)なら  $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$  とおいて、素朴に  $r^2 = \cos 2\theta$  を描いてみる。 $\cos 2\theta$  が負になるところは絶対値をとって  $r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$  として極座標系で  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  で描くと、図6の4番目に示したように4葉になる<sup>23</sup>。上下の葉は、焦点が  $(0, \pm a)$  のレムニスケートである。縦になるのは、直交座標への変換で、根号内が負のときは、 $-\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = y^2 - x^2$  より、式(67)の右辺の符号が反転することで、 $x$  と  $y$  が入れ替るからである。これは式(68)の形では、焦点を  $y$  軸上に移した  $\sqrt{x^2+(y+b)^2}\sqrt{x^2+(y-b)^2}=a^2$  に対応する。

図6の右では、 $45^\circ < \theta < 135^\circ$  と  $225^\circ < \theta < 315^\circ$  を除外して、オプション引数で作画点をそれぞれ `plotpoints=181` と指定して描いている。左図のリサーチャ、2番目の正葉形 (folium, 極座標系で  $r = \sin 2\theta$ ) は尖点 (cusp) をもたず (デフォルトの50点では拡大すると折線が見えるので、倍の)100点で描いている。極座標系のレムニスケートは尖点をもつ<sup>24</sup>。4葉の4番目の図ではオプション引数で作画点を `plotpoints=361` を指定して、原点を通過するようにしている (デフォルトの50点では、3番目のようになる)。4葉の図では、例えば上の葉は  $\theta = 45^\circ$  から  $135^\circ$  で描かれる。したがって右の葉から上の葉に移るところ (原点) が尖点になり、この近傍では図が不正確なりやすい。尖点をもつ図では、作画点が尖点を含むようにしなければならない。また、右の図でも、三角関数の誤差のために  $\cos 2\theta$  が負になることがあり<sup>25</sup>、平方根を求める前に `abs` を加えて変数の絶対値をとるなどの誤差を制御する必要がある<sup>26</sup>。極座標の式(64)できれいに描くのは難しい。

<sup>22</sup>和が一定だと楕円、差が一定だと双曲線になる。

<sup>23</sup>17, 18世紀の数学者は  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$  で第1象限部分の弧長を計算した。

<sup>24</sup>平面上で曲線が  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  と媒介変数表示されたとき、ある点で  $f'(t)$  と  $g'(t)$  が同時に零になる点で、少なくとも一方がその点で符号を変えるとき、その点を尖点という。

<sup>25</sup> $\cos 45^\circ$  の誤差のため

<sup>26</sup>PostScript は Adobe 社が開発したページ記述言語であるが、PostScript で記述された PS ファイルを GNU の Ghostscript でも実行して作画することができる。Ghostscript は1986年にGNUプロジェクトのためにL. Peter Deutschによって書かれ、GPLの下でリリースされた。その後 Deutsch は Ghostscript をプロプライエタリ・ソフトウェアとしてライセンスするために Aladdin Enterprises を設立した。Ghostscript の現行バージョンは GPL の下で再び利用可能になった。図6のレムニスケートプログラムを、三角関数の絶対値をとらずに Adobe 社の Acrobat 9 Pro で pdf 変換したところ、エラーとなった。実行時ライブラリが GhostScript と Adobe 社のものとで誤差の振舞いが異なるためであろう。

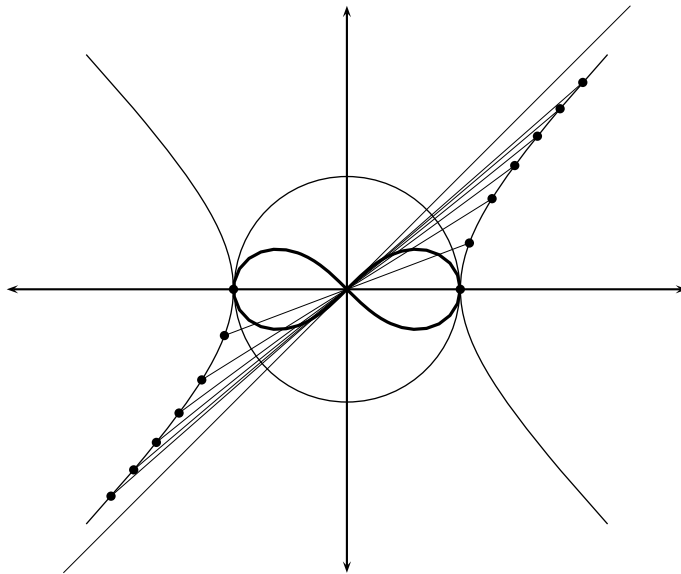


図 7: 直角双曲線の単位円に関する逆曲線としてのレムニスケート曲線

## A.2 レムニスケート曲線の第 2 の定義

式 (65) で  $a = 1$  の場合は, レムニスケート曲線は, 単位円に関して「直角双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  の逆曲線」(inverse curve) である. 単位円に関して  $(x, y)$  の逆の点 (inverse point) を  $(X, Y)$  とする.

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (69)$$

逆の点の逆の点は  $x = \frac{X}{X^2 + Y^2}, y = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$  となるので, 元の点である. 「単位円に関して逆の点」は  $(x, y)$  が原点から  $r$  の位置にあるとき, 原点と  $(x, y)$  を結ぶ直線上の原点から  $r^{-2}$  の位置にある<sup>27</sup>.

直角双曲線の媒介変数表示として  $x = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, y = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を用いる<sup>28</sup>. こうすると,  $\theta$  が  $0$  から  $90^\circ$  まで動くとき,  $(1, 0)$  から  $45^\circ$  の漸近線  $y = x$  の第 1 象限に近づく. 図 7 に, 第 1 象限にある直角双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  上の 7 点から原点に直線を引いた. 原点と双曲線上のこれらの点との距離を  $r$  とすると, レムニスケートとこの直線との交点との距離は  $r^{-2}$  である.

双曲線上の点は,  $\theta$  が  $90^\circ$  を越えるとき, 漸近線を第 1 象限から第 3 象限へ移る. その後,  $\theta$  が  $90^\circ$  から  $180^\circ$  まで動き,  $(-1, 0)$  に至る. つまり, 式 (64) で  $\theta$  にかかる 2 がなくなり, 1 周で直角双曲線を連続的に描くことができる. 図 7 では, 開始角と終了角を  $-42$  から  $42^\circ$  と  $138$  から  $222^\circ$  の 2 命令で描いている. 極座標表示のレムニスケートのように, 根号内が負になる場合を除外する必要がない.

逆の点は  $x = \frac{\sec \theta}{\sec^2 \theta + \tan^2 \theta}, y = \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta + \tan^2 \theta}$  で, 整理すると  $x = \frac{\cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}, y = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}$  となる. 式 (64) でパラメータ  $a$  を考慮すると次式が得られる.

$$x = \frac{\sqrt{2}a \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}, \quad y = \frac{\sqrt{2}a \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad (70)$$

<sup>27</sup> 点が半径  $r$  の円周上を動くとき, 逆の点は半径  $r^{-2}$  の円を, 同一の角度で動く. 点が原点を通る直線上を, 単位円との交点から外に向かって動くとき, 逆の点は単位円との交点から原点に向かって動く.

<sup>28</sup> 原点  $O$  から単位円に  $(90^\circ$  よりも小さい) 離心角  $\theta$  で直線を引き, 交点を  $P$  とする.  $P$  から  $x$  軸に垂線を引きその足を  $Q$  とする.  $P$  から単位円に接線を引き,  $x$  軸との交点を  $R$  とする.  $\triangle OQP$  と  $\triangle OPR$  は相似で  $OQ : QP : OP = \cos \theta : \sin \theta : 1$  であり,  $OP : PR : OR = 1 : \frac{\sin \theta}{\cos \theta} : \frac{1}{\cos \theta}$  である [12].

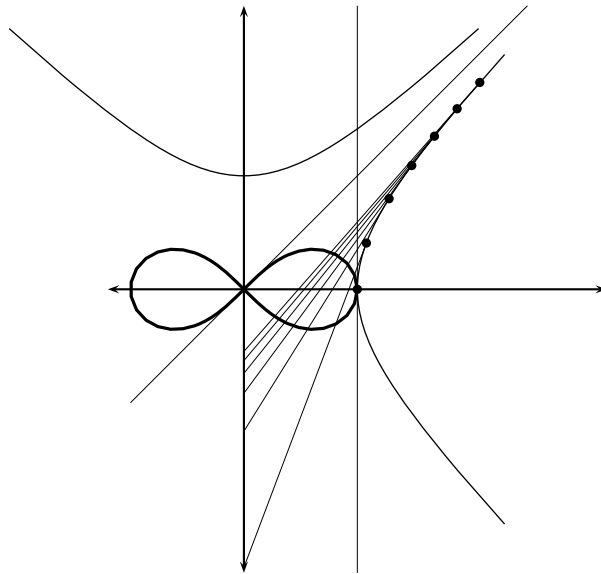


図 8: 直角双曲線の垂足曲線としてのベルヌイのレムニスケート曲線

式 (70) の  $x$  と  $y$  を式 (67) の左辺の  $x^2 + y^2$  に代入すれば,  $\frac{2a^2 \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$  である. 右辺の  $x^2 - y^2$  は  $\frac{2a^2 \cos^4 \theta}{(1 + \sin^2 \theta)^2}$  となり, 前者の 2 乗は後者の  $2a^2$  倍に等しいので, 媒介変数表示式 (70) が, 直交座標系の式 (67) を満たしていることが確認できた. したがって, 直角双曲線の, それに内接する円に関する逆曲線はレムニスケート曲線である. 簡潔な表現なので, これをレムニスケートの第 2 の定義としよう.

式 (70) を  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合について作図する. 双曲線の逆曲線を描くペンは, 原点から双曲線上の点への距離が  $r$  のとき, その方向で距離が  $r^{-2}$  の位置にあるので, 第 1 象限から原点を通過して, 第 3 象限になめらかに移動する. つまり, 尖点はない.

曲線を, PSTricks の `pstplot` パッケージの `parametricplot` 命令で, 式 (64) に対しては  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合, 式 (65) に対しては  $a = 1$  の場合について

```
\parametricplot[linewidth=1.2pt]{0}{360}          開始角 終了角
  {t dup cos exch sin dup mul 1 add div          X 座標
   t dup dup sin exch cos mul exch sin dup mul 1 add div} Y 座標
```

によって描く (図 8). 双曲線も `pstplot` パッケージの `psplot` コマンドで描ける.

```
\psplot[linewidth=0.5pt]{1}{2.5}{ x dup mul 1 sub sqrt}    y が正, sqrt{x^2-1}
\psplot[linewidth=0.5pt]{1}{2.5}{ x dup mul 1 sub sqrt neg} y が負, -sqrt{x^2-1}
```

極座標表示なら高校の『数学 C』にある  $r = \sqrt{\frac{2}{\cos 2\theta}}$  を使える [12]. これを用いると, 長くなるが, 1 行で描ける<sup>29</sup>.

```
\parametricplot[linewidth=0.5pt]{-42}{42}{t dup 2 mul cos 1 exch div sqrt exch cos mul
                                             t dup 2 mul cos 1 exch div sqrt exch sin mul}
```

<sup>29</sup>根号内が負になる変数  $t$  の領域では, `abs` を加えておけば, 双曲線を  $90^\circ$  回転した位置に描くことができるのは, レムニスケートの場合と同様である (図 8 にはこれも示した). 極座標系で  $r$  が  $\cos 2\theta$  がかかる関数の場合は,  $\cos \theta = \sin 90^\circ + \theta$  より, 位相が  $90^\circ$  前の図形を繰返し,  $\cos 3\theta$  がかかる関数の場合は, 位相が  $60^\circ$  前の図形を繰返す.

### A.3 レムニスケート曲線の数学的特長

「2つの焦点との距離の積が一定」あるいは「直角双曲線の円に関する逆曲線」のほかにも数学的な特徴をもつ。以下、これらを列記する。

#### A.3.1 原点から直角双曲線の接線への垂足の軌跡

直角双曲線の接線に、原点から垂線を下ろした点（垂足）の軌跡はレムニスケートになる。

作図 式 (65) に対して  $a = 1$  の場合について、図 8 に、直角双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  上の第 1 象限にある 6 点での接線と、点  $(1, 0)$  での接線、および双曲線の漸近線を示した。第 1 象限の双曲線は  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  で表され、導関数（接線の傾き）は  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  である。点  $(x_0, y_0)$  を通り、傾き  $\frac{m}{l}$  の直線は、公式  $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$  で与えられる。これに  $m = x_0, l = \sqrt{x_0^2 - 1}$  を代入すると、接線の方程式が得られる。

$$y = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}x - \frac{1}{y_0} \quad (71)$$

作図は点  $(x_0, y_0)$  が双曲線上にあるとき、その点と接線の  $y$  切片  $(0, \frac{-1}{y_0})$  を `psline` で結び、点  $(x_0, y_0)$  を `psdot` でマークした。双曲線上の 6 点での接線は、`PSTricks` の `multido` 命令でループ構成し、ループ本体で `eclarith.sty` のマクロ関数 `Mul, Sub, Div, Sqrt` を使用してプログラミングする<sup>30</sup>。

```
\multido{\R=1.08+0.2}{6}{
  \Mul\R\R\XX \Sub\XX{1}\T \Sqrt\T\Y
  \Div{-1}\Y\YY
  \psdot(\R,\Y)
  \psline[linewidth=0.2pt](\R,\Y)(0,\YY)}
}
```

1.08 から 0.2 おきに 6 点で  
計算は  $XX=R*R, T=XX-1, Y=\text{sqrt}(T)$   
 $y$  切片は  $YY=(-1)/Y$   
点を `psdot` で  
接線を `psline` で描く

変数  $R$  が  $x_0$  で、変数  $Y$  が  $y_0 = \sqrt{x_0^2 - 1}$ 、 $YY$  が  $y$  切片の座標値である。

数式で直角双曲線の接線から原点に立てた垂線の足の軌跡（垂足曲線，pedal curve）がレムニスケートになることを確認しておこう。

*Proof.* 双曲線上の点  $(x_0, y_0)$  における接線は  $x_0x - y_0y = 1$  で表される<sup>31</sup>。原点を通りこの接線と垂直な直線は  $y_0x + x_0y = 0$  で表される。両者より  $y_0$  を消去すると  $x_0(x^2 + y^2) = x, x_0$  を消去すると  $y_0(x^2 + y^2) = -y$  となる。両式をそれぞれ 2 乗して  $x_0^2 - y_0^2 = 1$  より  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  を得る。□

#### A.3.2 直角双曲線上に中心をもち原点を通る円の包絡線

中心が直角双曲線上にあり、原点を通る円の包絡線（envelope）はレムニスケートになる。

作図 式 (65) に対して  $a = 1$  の場合について、図 9 に直角双曲線の第 1 象限にある点で、 $x$  座標が 1.08 から 0.1 おきに 2.48 までの 15 点を中心として原点を通る円を描いた。15 の円の作画は `multido` を用いたループ構成で次のように書ける。

<sup>30</sup>`multido` のループ変数は、 $N$  で始めると整数、 $D$  で始めると寸法レジスタ、 $R$  で始めると小数点以下を含む数値が使用される。`eclarith` の演算では、最後の引数は未定義でも、`eclarith` 自身が定義してくれる。

<sup>31</sup>式 (71) の右辺の第 1 項の分母を  $y_0$  として、両辺を  $y_0$  倍する。

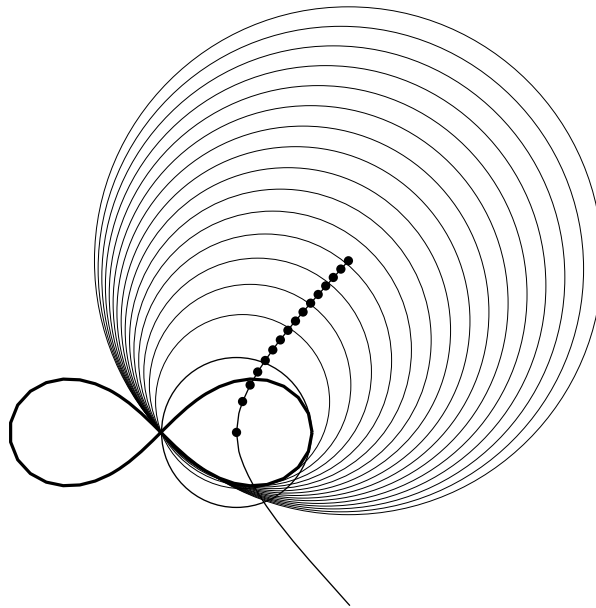


図 9: 中心が直角双曲線上にあり, 原点を通る円の包絡線

```

\multido{\R=1.08+0.1}{15}{
  \Mul\R\R\XX \Sub\XX{1}\T \Sqrt\T\Y
  \Mul\Y\Y\YY \Add\XX\YY\TT \Sqrt\TT\R
  \psdot(\R,\Y) \pscircle[linewidth=0.2pt](\R,\Y){\RR}
}

```

1.08 から 0.1 おきに 15 点  
 $Y = \sqrt{x^2-1}$   
 $RR = \sqrt{x^2+y^2}$   
 中心 (R,Y) 半径 RR の円

変数 R が  $x_0$  で, 変数 Y が  $y_0 = \sqrt{x_0^2-1}$ , RR が 円の半径  $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$  である.

数式で包絡線がレムニスケートになることを確かめる.

*Proof.* 媒介変数  $t$  を用いて, 双曲線上の第 1 象限にある点 P は  $(\cosh t, \sinh t)$  と表せる. この点を中心とし, 原点を通る円群を, 双曲線の媒介変数  $t$  をパラメータとして表す.

$$(x - \cosh t)^2 + (y - \sinh t)^2 = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad (72)$$

両辺を  $t$  で偏微分すると,

$$-2 \sinh t(x - \cosh t) - 2 \cosh t(y - \sinh t) = 4 \sinh t \cosh t \quad (73)$$

この式を展開すると  $\sinh t \cosh t$  の項は消えて  $\tanh t = -\frac{y}{x}$  が得られる. 公式  $\cosh t = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 t}} =$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$  と  $\sinh t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\tanh^2 t}}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$  を式 (72) に代入すると,

$$\left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \quad (74)$$

となり, 整理すれば式 (67) の  $a$  に  $\sqrt{2}$  を代入した  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$  のレムニスケートが得られる. □

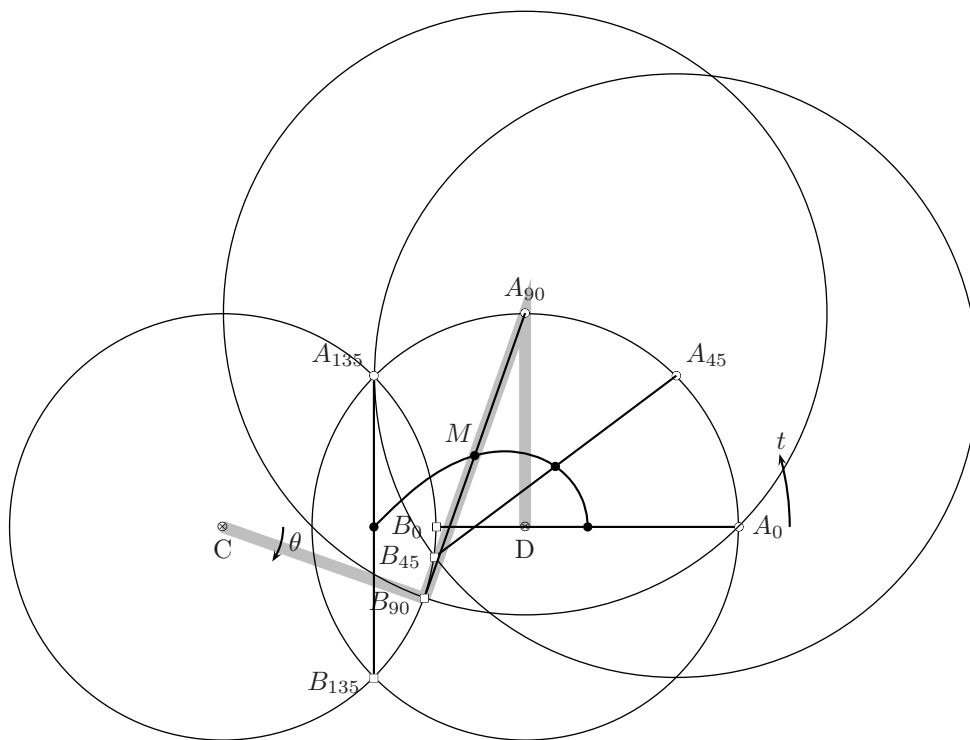


図 10: リンク機構  $DA_{90}B_{90}C$  と  $A_t B_t$  の中点の軌跡 (レムニスケート)

### A.3.3 リンク機構によるレムニスケートの作図

「3本の棒で構成されたリンク機構」でレムニスケートを描くことができる。長さ2の棒  $AB$  の両端を、長さ  $\sqrt{2}$  の棒に接続する。棒  $AB$  の中点を  $M$  とする。両側の棒の端点  $C$  と  $D$  は固定し、 $CD = 2$  とする。  $A$  は  $D$  の回りを、  $B$  は  $C$  の回りを回転する。  $A$  と  $B$  が同じ方向に回れば、  $M$  の軌跡は半径  $\sqrt{2}$  の円になる。逆方向に回るとレムニスケート曲線になる。「弾性のある細い金属か繊維でできた円を、両手で持って裏返すとできる曲線」は、円周と等しい弧長をもつレムニスケートだろうか?(図5の右図)。

定規とコンパスによるリンク機構の作図(図10)  $A$  の位置を回転角  $t$  を添字にして  $A_t$  と表す。  $t = 90^\circ$  の場合は  $A_{90}$  とする。  $B$  は焦点  $C$  を中心とした円周上を右回りに  $\theta^\circ$  の位置にあるが、リンク機構を介して  $A_t$  によって位置が決まるので  $B_t$  と表す。  $t = 90^\circ$  の場合は  $A_{90}$  から2の距離で、  $C$  を中心とする円周上の位置で、  $B_{90}$  がある。このときのリンク機構をライトグレーで示した。

$A_t B_t$  の中点  $M$  の軌跡を、定規とコンパスで作図する要領で描いてみよう。焦点  $D = (-1, 0)$  と  $C = (1, 0)$  を中心に、半径  $\sqrt{2}$  の円を描く。初期状態は  $CB_0 A_0 D$  で3本の棒が水平になった状態とする。点  $A$  が  $45^\circ$  進んだ  $A_{45}$  を中心に、半径2の円を描き、  $C$  を中心とする円との交点が  $B_{45}$  である。  $A_{45}$  と  $B_{45}$  を `psline` で結び、その中点を `psdot` でマークした。同様に  $90^\circ$  進んだ  $A_{90}$  と、  $135^\circ$  進んだ  $A_{135}$  でも描く。  $A_{135} B_{135}$  は垂直で  $M$  は  $x$  軸上(原点)にくる。これ以降の軌跡は対称性からいえるので、ここまでの軌跡がレムニスケートになることを確かめる。

レムニスケート曲線の作図と証明 2円の交点の座標値は、非線形方程式を解かなくては求まらないので、 $\text{\LaTeX}$ のマクロプログラミングでは難しい。そこでここでは作画機能がプログラミング言語の仕様に含まれる `BASIC` を使って作図し、その座標値を `psline` 命令として出力して、それを  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$  のソーステキストに貼る方法(数値計算プログラミングによる方法)をとる。さらに、数値計算プログラムには、中

点の座標値を式 (68) の左辺に代入して、2つの焦点との距離の積を表示して「積が一定」の条件を確かめることで、 $M$  の軌跡がレムニスケートであることの証明に替える。

$D$  を中心として  $x$  軸から  $t^\circ$  の円周上の位置にある  $A_t$  の座標は  $(x_a, y_a) = (\sqrt{2} \cos t + 1, \sqrt{2} \sin t)$  である。この点を中心として半径 2 の円の周上の点  $(x, y)$  は次式を満たす。

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - 4 = 0 \quad (75)$$

一方、初期状態から下方に  $\theta^\circ$  だけ進んだ円周上の位置にある  $B_t$  の座標は

$$x = \sqrt{2} \cos \theta - 1, \quad y = -\sqrt{2} \sin \theta \quad (76)$$

である。式 (76) の  $x$  と  $y$  を式 (75) に代入することで、未知変数を  $\theta$  だけにできる。

$$f(\theta) = p \cdot \cos \theta + q \cdot \sin \theta + r \quad (77)$$

$$p = -2\sqrt{2}(x_a + 1), \quad q = 2\sqrt{2}y_a, \quad r = x_a^2 + y_a^2 + 2x_a - 1$$

$f(\theta) = 0$  を満たす  $\theta$  を式 (76) に代入すれば、2つの円の交点の座標値が得られる。

これを次の十進 BASIC プログラムで、角度  $t$  を  $1^\circ$  から  $134^\circ$  まで  $7^\circ$  刻みで探す。

```

lemachine.BAS
OPTION ANGLE DEGREES          弧度法ではなく「度」で三角関数の引数を扱う
SET WINDOW -2,2,-2,2
DRAW grid
PRINT "\psline";
FOR t= 1 TO 134 STEP 7        角度 t が 1 度から 134 度まで 7 度おきに
  LET x=SQR(2)*COS(t)+1      A の x 座標値
  LET y=SQR(2)*SIN(t)        A の y 座標値
  LET theta=thetabi(x,y,0,45) 2 分法で (x,y) に対する theta を区間 (0,45) で探す
  LET xx=SQR(2)*COS(theta)-1 B の x 座標値
  LET yy=-SQR(2)*SIN(theta)  B の y 座標値
  LET xm=(x+xx)*0.5          M の x 座標値
  LET ym=(y+yy)*0.5          M の y 座標値
  PLOT LINES:xm,ym;          M を BASIC で作画
  PRINT USING "(--%.#### , -%.#####)":(x+xx)*0.5,(y+yy)*0.5; LaTeX 用の出力
  ! PRINT SQR((xm-1)^2+ym^2)*SQR((xm+1)^2+ym^2) チェック (M と 2 つの焦点との距離の積)
NEXT t
END

```

式 (77) は  $\theta = 0$  では  $A_t B_t$  の距離は 2 よりも短く、 $\theta = 45$  では 2 よりも大きい。つまり  $f(\theta) = 0$  を満たす  $\theta$  は、区間  $(0, 45)$  の間に 1 つだけ存在する。そこで区間  $(0, 45)$  を初期値として 2 分法を用いる<sup>32</sup>。

```

EXTERNAL FUNCTION thetabi(x,y,a,b)
OPTION ANGLE DEGREES
DEF f(t)=p*COS(t)+q*SIN(t)+r    式の定義
LET p=-2*SQR(2)*(x+1)
LET q=2*SQR(2)*y
LET r=x^2+y^2+2*x-1
LET fa=f(a)
LET fb=f(b)
DO UNTIL ABS(fa-fb) < 0.00000001 収束判定値が 10^{-8}
  LET c=(a+b)/2                  中点 c で
  LET fc=f(c)                    関数値 f(c) を求め
  IF fa*fc < 0 THEN              区間 (a,c) が解を含んでいれば
    LET b=c                      c を 次の反復の上端 b に
  LET fb=fc

```

<sup>32</sup>BASIC による 2 分法プログラムは、高校の『数学 B』の教科書の「数値計算とプログラミング」の章に掲載されていた [7]。

ELSE	区間 (c,b) が解を含んでいれば
LET a=c	c を 次の反復の下端 a にセットする
LET fa=fc	
END IF	
LOOP	
LET thetabi=c	
END FUNCTION	

$B$  の位置が分かたら、レムニスケート曲線を PLOT LINES で描き、さらに  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ 用の psline コマンドを出力する。

十進 BASIC の実行窓に表示される psline(1.4141,0.01024)(1.4071,0.08144)(1.3894,0.15109) (以下略) をコピーして  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  の原稿に貼る。図 10 のレムニスケート曲線はこの psline 命令によって描かれている。

プログラムではコメントアウトされている「チェック」の行を活かして ( $\text{\LaTeX}$  用の出力をコメントアウトして) 実行すると、 $A_t B_t$  の中点が、2 つの焦点との距離の積を表示する。

1.0000000035893 .999999999136748 1.00000000036895 ... .99999999999354 の結果が得られた。2 分法の収束判定値を  $10^{-8}$  にしているので、 $A_t B_t$  の中点  $M$  の軌跡がレムニスケート曲線であることを、この精度で確かめられた。

#### A.3.4 レムニスケート曲線の弧長

ループ 1 つで囲まれる面積は  $a^2$  であり、2 つ合わせて  $2a^2$  となる。曲線の全弧長は第 1 種完全楕円積分を使って  $4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  によって表される。これは、式 (64) によった場合の値である。完全楕円積分の標準形では、式 (65) よりも式 (64) が好まれる。

弧長と完全楕円積分 極座標系の式 (64) を用いて、全弧長は次の積分で表される。

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos 2\theta} \quad (78)$$

$\tan \theta = t$  と置くと  $L = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$  と変換される。楕円積分の標準形への変換は、根号内が 4 実根をもつ場合で、 $t^2 = 1 - y^2$  とおくことで

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (79)$$

したがって全弧長は  $4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  によって表される。半径 1 の円の円周を  $2\pi$  で表すのにならって、レムニスケートの全周を  $2\varpi$  で表すことがある。極座標系の式 (65) を用いて、 $a = 1$  の場合の半弧長 (1 つのループの弧長) は  $\varpi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \doteq 1.311031$  である。

#### A.4 ガウスと算術幾何平均とレムニスケート曲線

レムニスケートはベルヌーイ兄弟によって最初に発見され、イタリアの数学者ファニャーノによって楕円積分論の事例として詳しく研究された。オイラーはファニャーノの『数学論文集』に刺激を受け、微分方程式論の研究を進展させ、独自の楕円積分論を構築した。ガウスは 1799 年 5 月 30 日、算術幾何平均を計算して  $\pi$  と  $\varpi$  の比に気付いて数学日記に次のように記した [13, p. 139]。



1 と  $\sqrt{2}$  の間の算術幾何平均の値は  $\frac{\pi}{\omega}$  に等しいことを、小数 11 位まで確認した。このことが証明されたなら、解析におけるまったく新しい領域がまちがいに切り開かれるであろう。

また数学者、高木貞治は『近世数学史談』でガウスの日記のこの記述に触れ、第 9 章「書かれなかった楕円関数論」において次のように記述した [5]。

ガウスは幼少のときから「算術幾何平均」に興味を有して、多くの特別の数に関してその計算をしている。(中略) 遂に 1800 年 5 月に至って一般楕円関数を見出し、6 月には modular function を発見した。少なくともその端緒を確実に把握するに至ったのである。ガウスはこれらの発見に関して生前に発表する所なくして終わった。

『近世数学史談』の第 7 章「レムニスケート関数 ( $\sigma$  関数)」において次のように書かれている [5]。

ガウスは前から既に

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

からの類推に基づいて三角関数の拡張を試みていたのであって、手記の中に

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

などに関する種々の計算が散見する。多幸なる 1797 年 1 月 8 日に至って、ゆくりなく正しきもの<sup>33</sup>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

を捕え得たのである。ガウスにあつては研究の出発点が既に積分の逆関数にあつたのである。

ガウスは  $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  に於いて

$$x = \sin \operatorname{lemn} u = \cos \operatorname{lemn} (\omega - u) \tag{80}$$

と置いて、函数  $\sin \operatorname{lemn}$ . (レムニスケートのサイン) 及び  $\cos \operatorname{lemn}$ . を定義した。但し  $\omega$  は弧 OPA 即ち

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

(中略)

レムニスケートの等分は歴史上重要である。この頃ガウスは整数論 (Disq. arith.) の稿を終らんとしていたのである。Disq. arith. は 1801 年に出版されたが、その第 7 編円周等分論の首節に於いて、円周等分と同様の方法が他の函数例えば、 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  に関する函数にも適用され得ることが述べてある。この一節がアーベルにもヤコービにも影響を与えたことは周知である。

## 参考文献

- [1] 高橋大介. 円周率世界記録更新. 情報処理, pp. 1228–1234, December 2009.

<sup>33</sup> 「ゆくりなく」は「思いがけず」の意である。

- [2] 高瀬正仁. ガウスの数学日記. 日本評論社, 2013.
- [3] 小林昭七. 円の数学. 裳華房, 1999.
- [4] 安藤四郎. 楕円積分・楕円関数入門. 日新出版, 1970.
- [5] 高木貞治. 復刻版 近世数学史談, 数学雑談. 共立出版, 1996.
- [6] 高瀬正仁. 楕円関数論形成史叙述の試み—「楕円積分」と「超越的なもの」をめぐって—. 数理解析研究所講究録, Vol. 1787, pp. 221–232, 2012.
- [7] 宮西正宣(他). 高等学校-数学 B. 新興出版社啓林館, 2007.
- [8] 高木貞治. 解析概論. 岩波書店, 1961.
- [9] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信. 数学公式 1. 岩波書店, 1956.
- [10] 中川仁. 算術幾何平均について. /<http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi2002.pdf>, 2008.
- [11] Derek. F. Lawden. *Elliptic Functions and Applications — Applied Mathematical Sciences Volume 80*. Springer-Verlag, 1989.
- [12] 宮西正宣(他). 高等学校-数学 C. 新興出版社啓林館, 2007.
- [13] 高瀬正仁. ガウスの数学日記. 日本評論社, 2013.