

# 流れのある拡散現象のシミュレーション ～移流拡散方程式～

担当: 高安 亮紀

# 目的

- 河川や海洋等の水質濃度変化をシミュレーションするには、流れと拡散の両方を考えて解く必要がある。

⇒移流拡散方程式を用いてシミュレーションを行う。

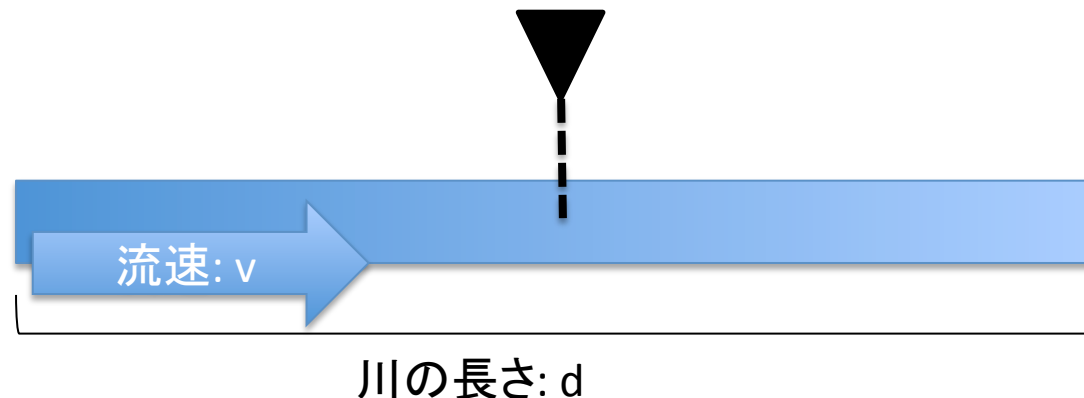


「熱伝導現象のシミュレーション」において学習した、差分法で離散化する方法を用いる。前回の授業までの内容をしっかり理解してから授業に望むこと。

# 濃度の移動と拡散現象

- 流速 $v$ で流れている川にインクを落としつつづけることを考える。
- インクは川の中で拡散し、さらに川の流れによって移動すると予想できる。
- このような濃度の拡散と移動をシミュレーションする。  
→まずは、1次元移流拡散方程式を用いてグラフで表す。

<イメージ図>



# 移流拡散方程式(1次元)

- 左辺の第3項は拡散項：濃度の拡散効果を表す(熱伝導問題では、濃度=温度だった)。
- 左辺の第2項は移流項：移動によって運ばれる効果を表す。
- 左辺の第1項は時間項(非定常項)：濃度の時間的变化を表す。

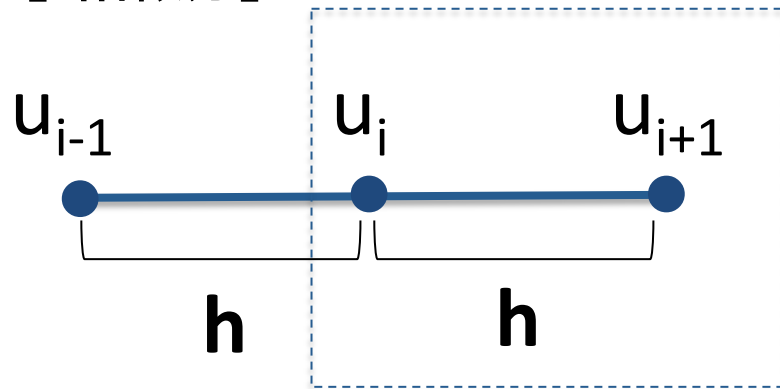
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{時間項}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{移流項}} - \underbrace{k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{拡散項}} = f$$

t: 時間、v: 流速、k: 拡散係数(ただし空間方向に一定と仮定)  
f: 濃度の発生量

# 【復習】差分法

- ・1次元問題では、以下のように  $i$  における2階微分係数を求める

【1階微分】



$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

後で使うので追加

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

【2階微分】

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

# 離散化

- ・移流拡散方程式を陽解法で差分法によって離散化すると以下ようになる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} + v \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2h} - k \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} = f_i$$

※時間の刻み幅 $\Delta t$ 、位置の刻み幅 $h$ 、分割した要素数 $n(2 \leq i \leq n-1)$

- ・整理すると以下のような漸化式となる。

$$u_i^{(k+1)} = (1 - 2c_1)u_i^{(k)} + (c_1 + c_2)u_{i-1}^{(k)} + (c_1 - c_2)u_{i+1}^{(k)} + f_i \Delta t$$

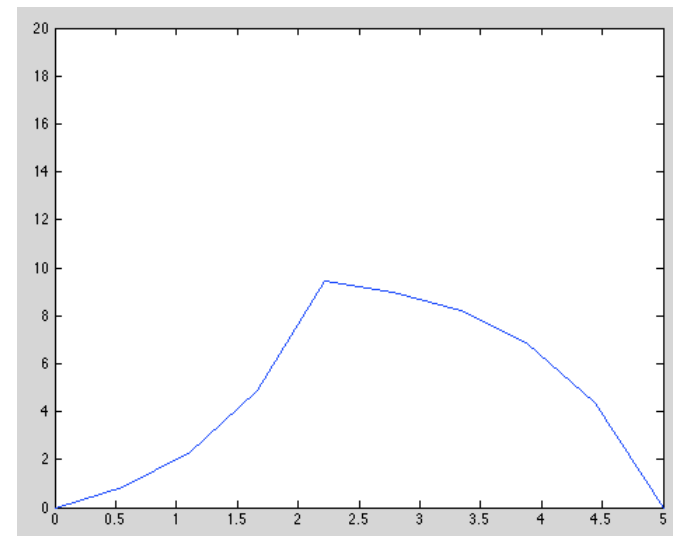
$$\left( h = \frac{d}{n-1}, \quad c_1 = \frac{k \Delta t}{h^2}, \quad c_2 = \frac{v \Delta t}{2h} \right)$$

# 実習1: プログラム作成

- (1) 非定常熱伝導方程式(一次元)の陽解法のプログラム(theat1d.m)を参考にし、以下のようなグラフを出力するプログラムadeq1d.mを作成しよう。
- (2) 陰解法、クランク・ニコルソン法でも、それぞれグラフを表示できるようにしよう。

```
>> n=10; dt=0.05; loop=200;  
>> adeq1d_loop(n,dt,loop)
```

移流拡散方程式:  
advection-diffusion equation  
( convection-diffusion eq. )



## 【復習】陰解法（移流項なしの場合）

- ・時間に対して後退差分にすると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} = f_i$$

※時間の刻み幅 $\Delta t$ 、位置の刻み幅 $h$ 、分割した要素数 $n(2 \leq i \leq n-1)$

- ・整理すると、以下のようになり、 $\Delta t$ 毎に連立一次方程式を解かなければならないため、陽解法より煩雑となるが、数値的に安定する。

$$(1 + 2c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} = u_i^{(k)} + f_i \Delta t$$

$$\left( h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

# プログラム作成のヒント

- インクを落とすのは真ん中付近のみなので、発生量 $f$ については

```
cf = 20.0; % 発生量  
f = zeros(n,1);  
ic = round(n/2); % 真ん中付近の節点番号  
f(ic) = cf; % 真ん中付近でのみ発生
```

のようにして、各節点における発生量を設定する（ic番目だけ20.0で、他は0）。

# 【復習】クランク・ニコルソン法

・kステップ目とk+1ステップ目の平均を取る方法。

方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} \right) = f_i$$

※時間の刻み幅 $\Delta t$ 、位置の刻み幅 $h$ 、分割した要素数 $n(2 \leq i \leq n-1)$

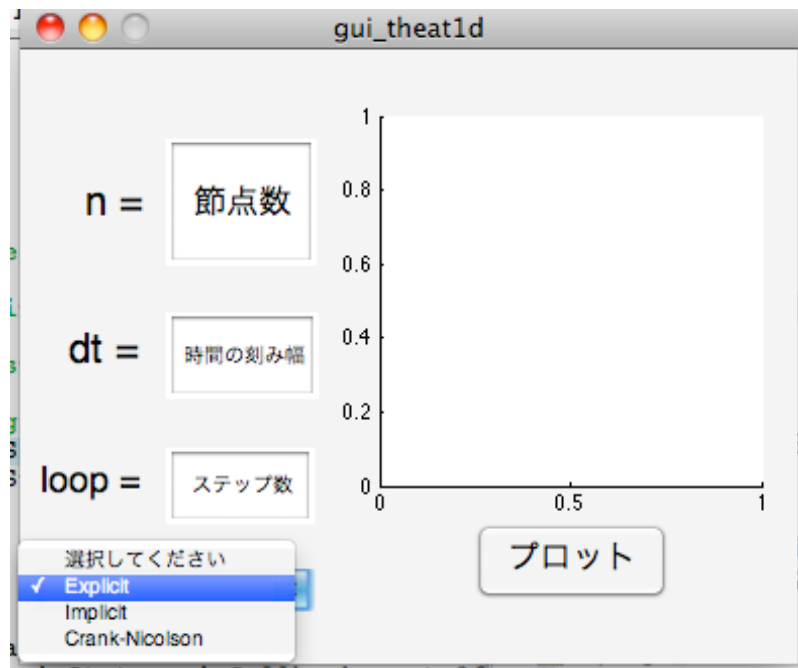
・整理すると以下のようになり、陰解法と同様に、 $\Delta t$ 毎に連立一次方程式を解かなければならないが、安定して計算できる。

$$(2 + 2c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} = (2 - 2c)u_i^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + 2f_i\Delta t$$

$$\left( h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

## 実習2: GUIからmethodを選択し、グラフを表示

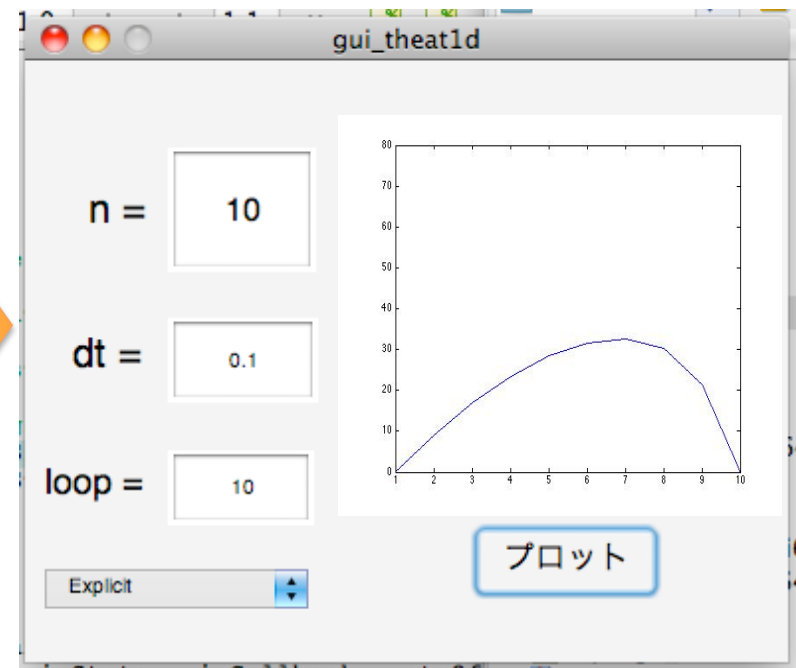
- ・popup-menuで選択



- ・陽解法  
を選択



- ・「プロット」ボタンを押してグラフ表示

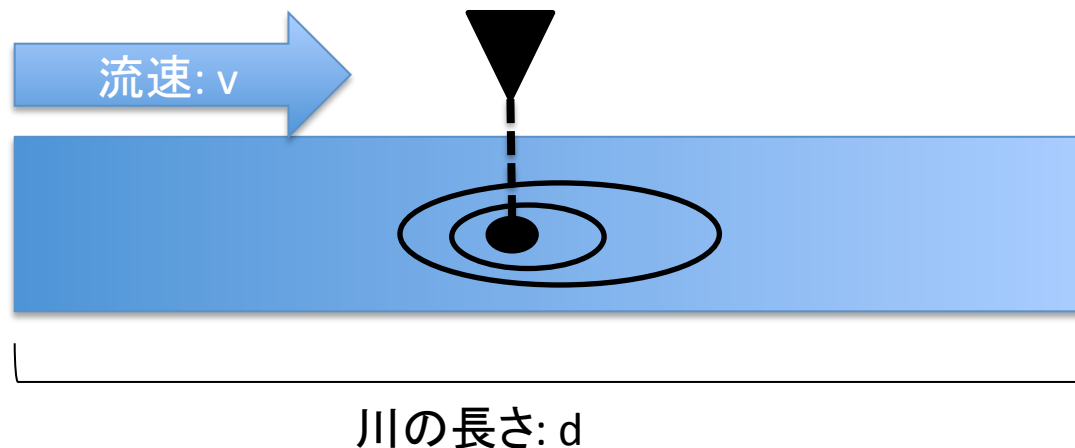


- ・余裕がある人は、流速や拡散係数も入力できるようにしてみましょう！

応用: インクを瞬間的に落とした場合のシミュレーション

- 川の真ん中にインクを瞬間的に落とした場合の濃度の拡散と移動の様子をグラフで示す。

<濃度の等高線イメージ図(2次元)>



- ヒント: 濃度の発生量 $f$ を与えるのを、1ステップ目のみにする。