熱伝導現象のシミュレーション(1)
～定常問題～

担当: 高安 亮紀

目的

- １次元の定常熱伝導現象を可視化することで、モデル化の基礎、微分方程式の離散化、連立一次方程式の解の計算など、数値計算によって近似解を算出する手順を学ぶ。

- 【演習】

上記を踏まえて2次元の定常熱伝導現象を可視化する

1次元熱伝導現象

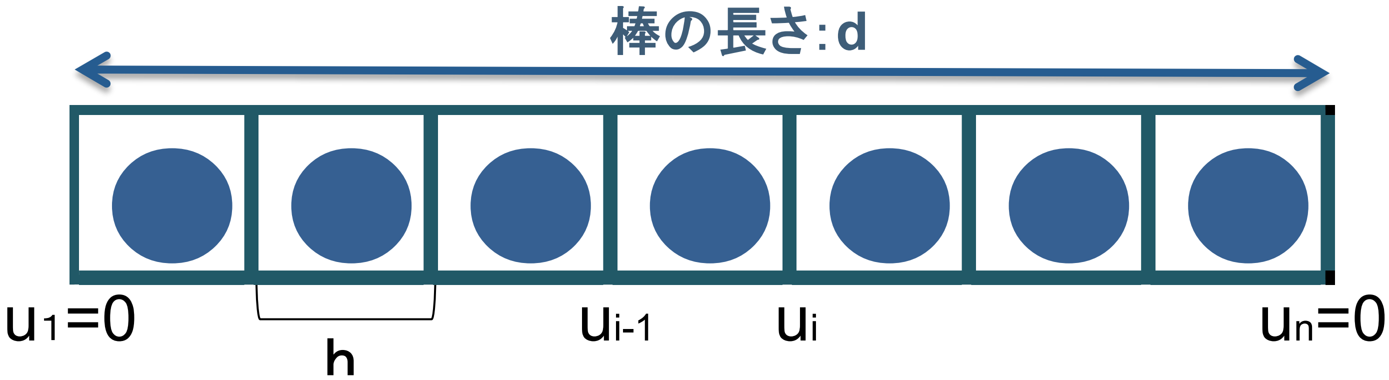
・温度変化がなくなるまで、一定の火力で棒を熱し続ける。このときの棒の温度分布を調べ、可視化する。
※両端の温度は固定

離散化

・棒を要素に分割し、要素(または、要素間の境目)に番号を付けて考える。

 i番目の要素間の境目の温度をu_i(0≦i≦n)とする。

このように、連続した値を求める問題を、非連続な値を求める問題に置き換えることを離散化という。



計算する際の考え方

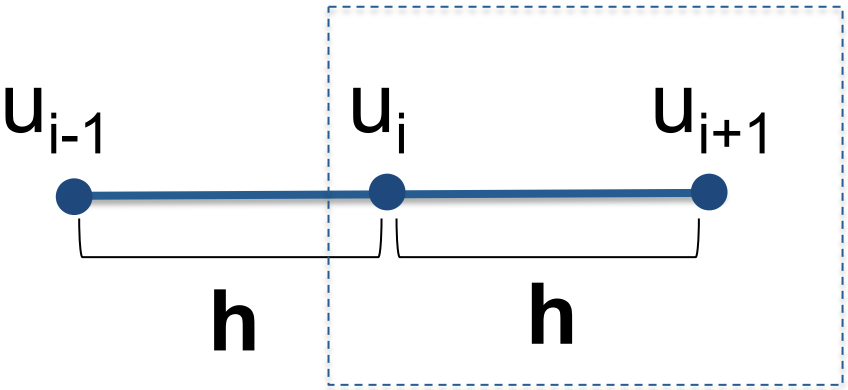
・計算機を使って微分方程式を解くためには、
複雑な微分方程式であっても、**四則演算の操作を組み合わせて解を求めなくてはならない。**
したがって、解きたい微分方程式を
連立一次方程式に離散化する必要がある。
その方法の一つが差分法である。

※差分法とは・・・ 物体を点の集合と考え、それぞれの点における微分係数を差分商に置換え、差分方程式を作る手法

差分法について

・1次元問題では、以下のようにｉにおける2階微分係数を求める

【1階微分】



$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

【2階微分】

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} - \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right)$$

差分法で熱伝導方程式を離散化（1）

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f & \cdots \text{棒の内部} \\ u_1 = 0, u_n = 0 & \cdots \text{棒の端} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) = f_i$$

$$\Leftrightarrow \quad 2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = f_i h^2 \qquad (i=2〜n-1)$$

差分法で熱伝導方程式を離散化（2）

（例）節点数n=5の場合、5元連立一次方程式が出来る

$$i = 1 \quad \ldots \quad u_1 = 0$$

$$i = 2 \quad \ldots \quad -u_1 + 2u_2 - u_3 = fh^2$$

$$i = 3 \quad \ldots \quad -u_2 + 2u_3 - u_4 = fh^2$$

$$i = 4 \quad \ldots \quad -u_3 + 2u_4 - u_5 = fh^2$$

$$i = 5 \quad \ldots \quad u_5 = 0$$

差分法で熱伝導方程式を離散化（3）

・以下のような連立一次方程式Au=bを解き、uを求める

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times \overset{u}{\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} 0 \\ fh\hat{}2 \\ fh\hat{}2 \\ fh\hat{}2 \\ 0 \end{bmatrix}}
$$

MATLABでuiの解を求める

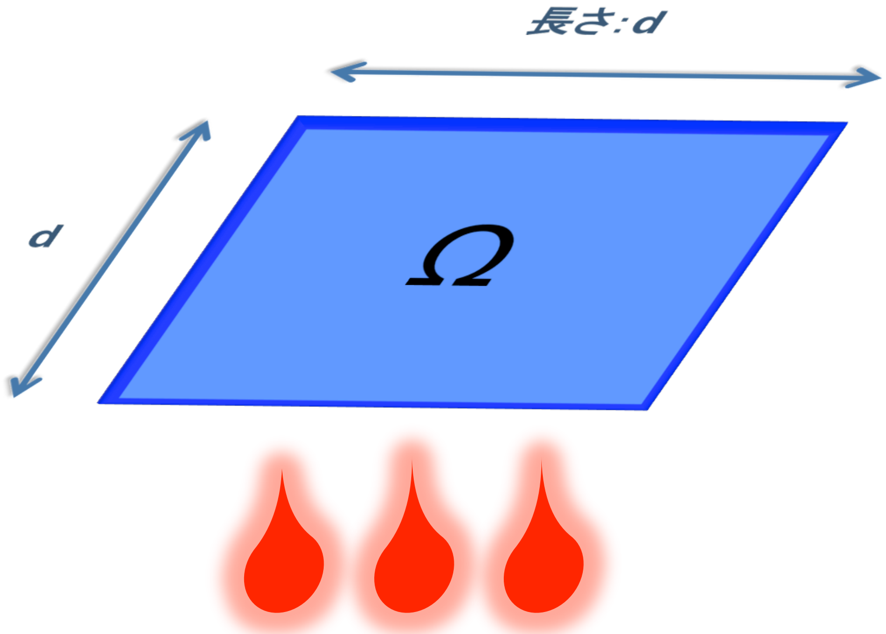
```
function u = heat1d(n)

% 熱伝導シミュレーション（1次元、定常）
%   n: 節点の数

d = 5; % 棒の長さ
f = 20; % 発熱量
h = d/(n - 1); % 分割の幅
A = zeros(n); b = zeros(n,1); % 初期化







u = A\b; % Ax=bを解く（\はoption+\）

```

前ページのような行列A,
ベクトルbを求めるfor文の
プログラムを作成

温度の分布を見たい場合は、plot(u)

2次元熱伝導現象

・一定の火力で板を裏側から熱し続ける。このときの板の温度分布を調べ、可視化する。
※周りの温度は固定

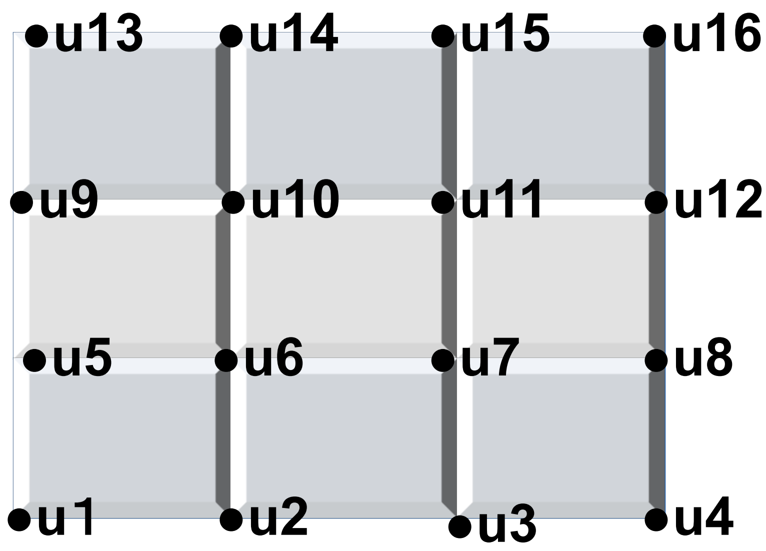


Ω・・・2次元の板
Γ・・・板の周り

２次元熱伝導現象の離散化（１）

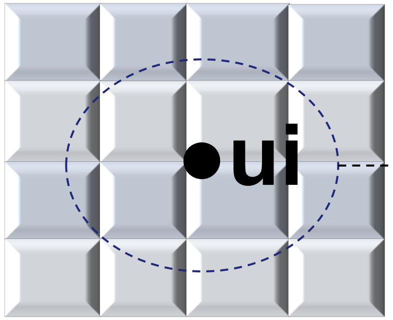
・板を要素に分割し、節点に番号を付けて考える。
i番目の節点の温度をu_i（$0 \leqq i \leqq m$）とする。

・m=4の場合

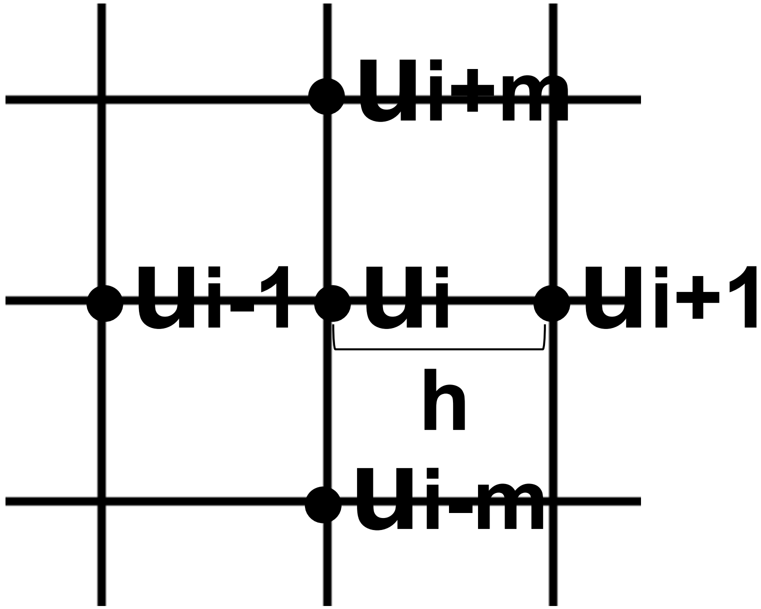


２次元熱伝導現象の離散化（2）

・一般的に表すと



節点（格子点）



縦：x軸方向

横：y軸方向

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i+m} - 2u_i + u_{i-m}\right)$$

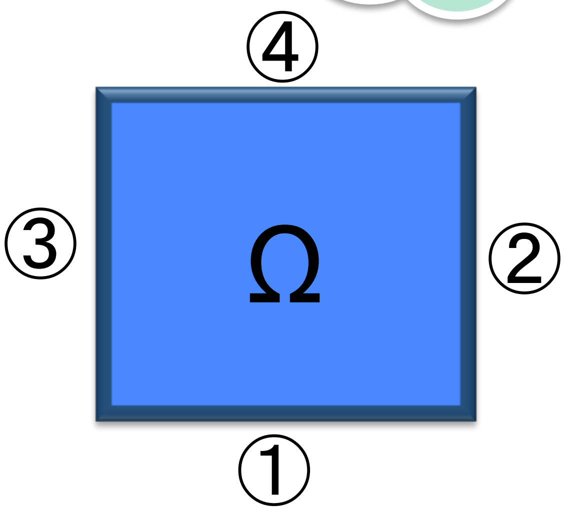
差分法で2次元熱伝導方程式を離散化(1)

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f & \cdots \text{ in } \Omega \\ u=0 & \cdots \text{ on } \Gamma \end{cases}$$

離散化→

$$4u_i-u_{i-1}-u_{i+1}-u_{i-m}-u_{i+m}=f_ih^2$$

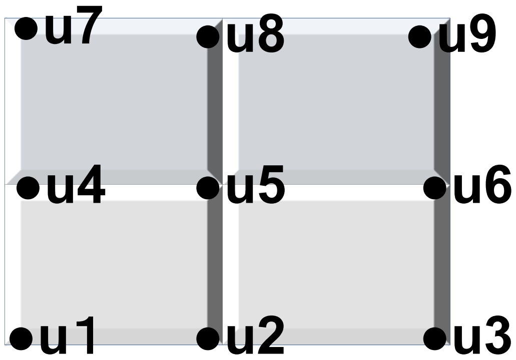
【ポイント】点uiの4倍の値から、周りの値の合計を引いたもの



$$\begin{cases} ①\ u_1\sim u_m=0 \\ ②\ u_{km}=0, k=1\sim m \\ ③\ u_{(k-1)m+1}=0, k=1\sim m \\ ④\ u_{(m-1)m+1}\sim u_{m^2}=0 \end{cases}$$

差分法で２次元熱伝導方程式を離散化(2)

（例）m=3の場合、9元連立一次方程式が出来る



$$i=1 \quad \dots \quad u_1=0$$
$$i=2 \quad \dots \quad u_2=0$$
$$i=3 \quad \dots \quad u_3=0$$
$$i=4 \quad \dots \quad u_4=0$$
$$i=5 \quad \dots \quad 4u_5-u_4-u_6-u_2-u_8=fh^2$$
$$i=6 \quad \dots \quad u_6=0$$
$$i=7 \quad \dots \quad u_7=0$$
$$i=8 \quad \dots \quad u_8=0$$
$$i=9 \quad \dots \quad u_9=0$$

差分法で2次元熱伝導方程式を離散化(3)

（例）m=3の場合

・以下のような係数行列A,右辺ベクトルbについて連立一次方程式Au=bを解き、uを求める

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}}
\times
\overset{u}{\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \\ u9 \end{bmatrix}}
=
\overset{b}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}
$$

【演習】MATLABでuiの解を求め、グラフに表示する

・uの解を求めるプログラム

Editor – /Users/yanagisawayuuka/Documents/MATLAB/he

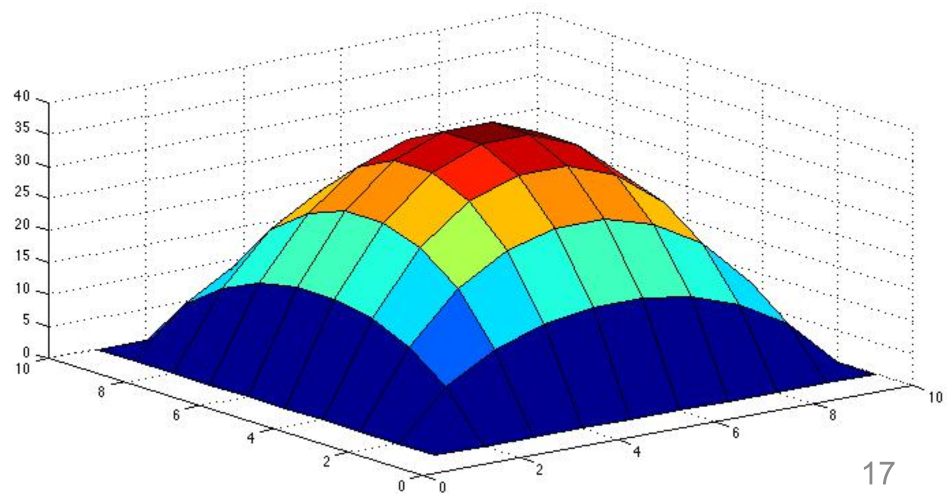
```
function u = heat2d(m)
% 熱伝導シミュレーション（2次元、定常）
%  m: 分割数

d = 5; % 板の縦横の長さ（d * d)
f = 20; % 発熱量
h = d/(m - 1); % 分割の幅
n = m^2; % 節点数
A = zeros(n); b = zeros(n,1); % 初期化
for jj=1:m
  for ii=1:m

    end
  end
end
u = A\b; % Ax=bを解く（\はoption+\)
```

前ページような行列A,
ベクトルbを求めるfor文の
プログラムを作成

【演習】MATLABでuiの解を求め、グラフに表示する

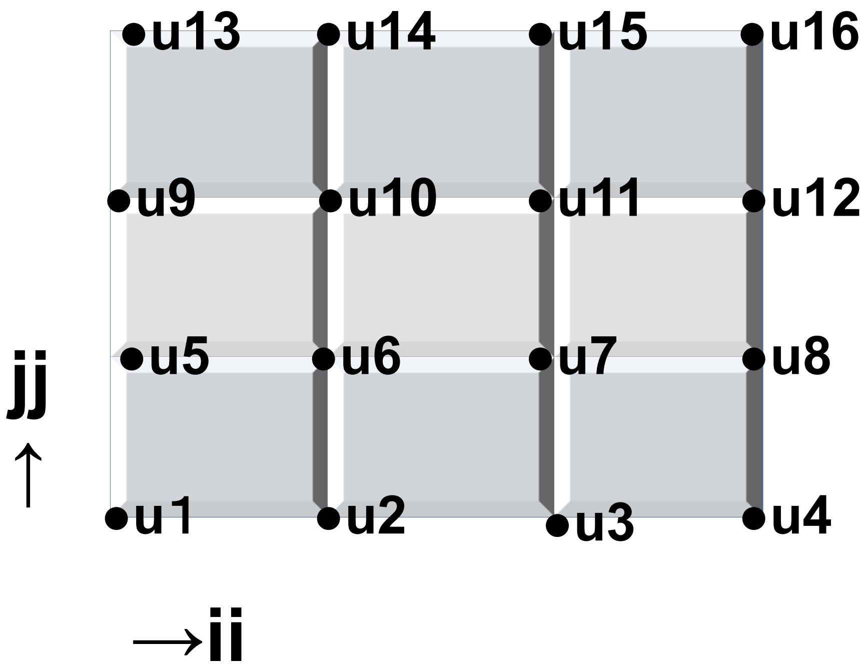
・グラフを表示するプログラム

```
function mygraf2d(m,u)
% 温度分布を２次元グラフで表示

w = zeros(m);
for jj=1:m
   for ii=1:m


   end
end
surf(w)
```



【演習ヒント】(ii,jj)とuiの対応関係

（例）m=4の場合



$$i = ii + (jj - 1)m$$

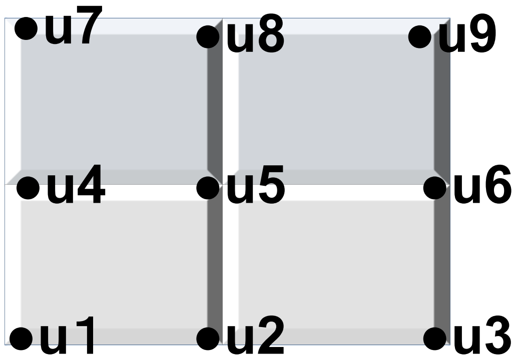
(ii,jj)とuiの対応表

ii	jj	ui
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
1	2	5
2	2	6
3	2	7
4	2	8
1	3	9
2	3	10
3	3	11
4	3	12
1	4	13
2	4	14
3	4	15
4	4	16

【演習ヒント】求めたuにおけるグラフ表示方法

（例）m=3の場合

求めたu1～u9までを、以下のように配置する。

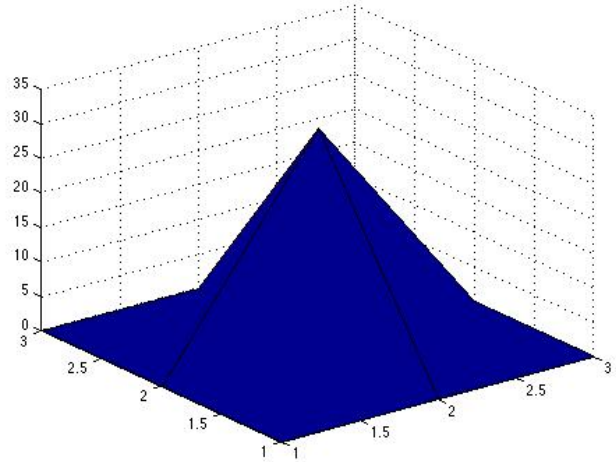


行列→

行列w

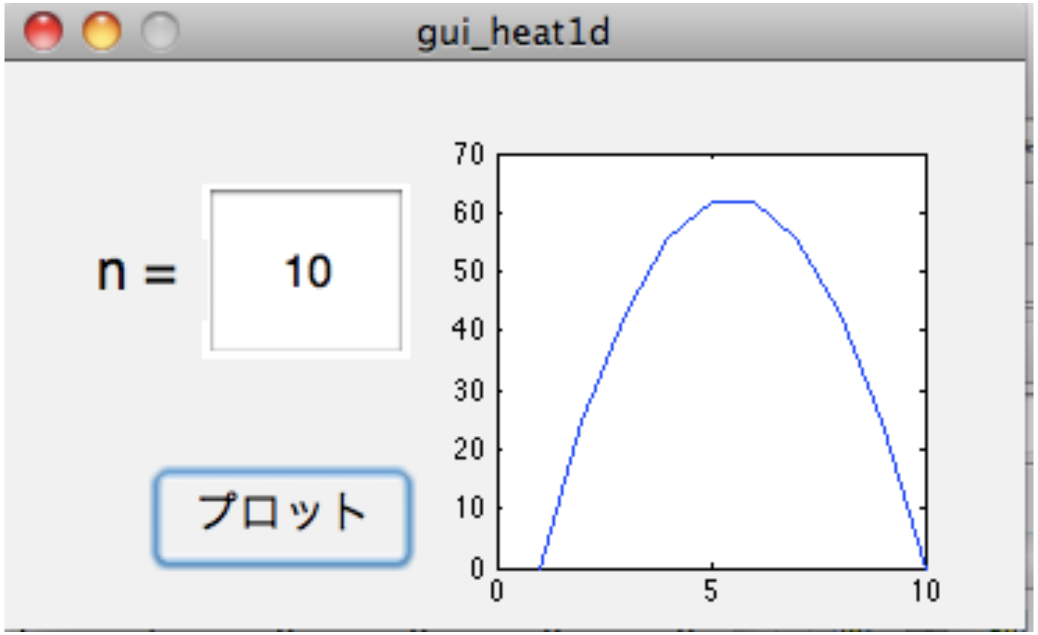
0	0	0
0	31.25	0
0	0	0

surf(w)

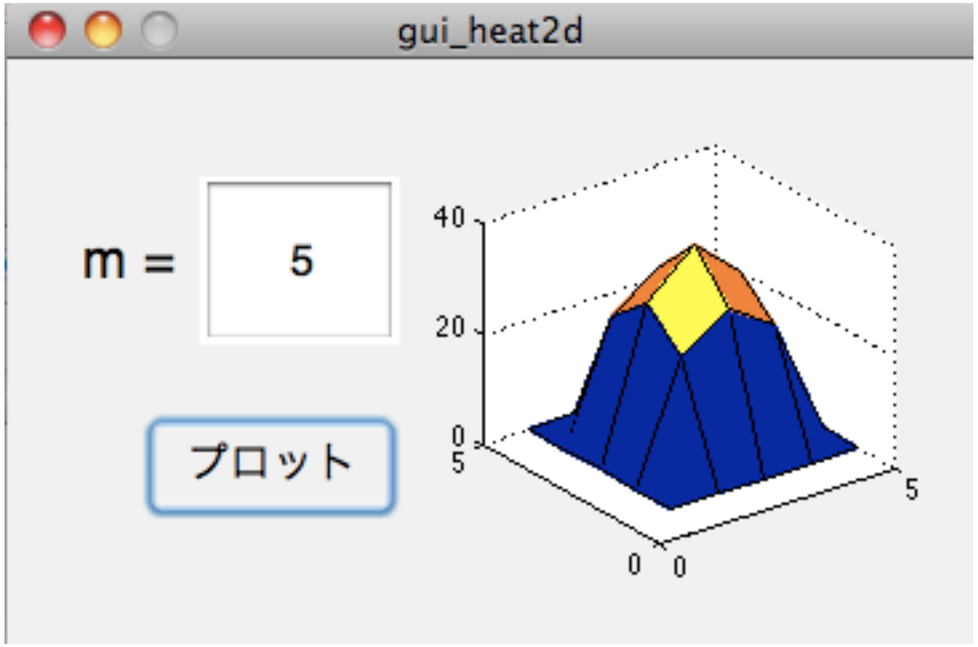


【演習問題2】GUIからグラフの表示

・1次元熱伝導



・2次元熱伝導



☆以前の講義資料「GUIプログラムの作成」を参考にしながら
作成しましょう

【応用問題2】パラメータの追加（熱伝導率λ）

・授業では、熱伝導率λ＝1と仮定していましたが、パラメータとして設定し、プログラムを変更しましょう

1次元

$$\begin{cases} -\lambda \dfrac{d^2u}{dx^2} = f \\ u_1 = 0, u_n = 0 \end{cases}$$

2次元

$$\begin{cases} -\lambda \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \\ u = 0 \end{cases}$$

（参考）

物質	熱伝導熱λ
水	0.582
氷	2.2
アルミニウム	236
鉄	83.5
銅	403
銀	428
乾燥空気	0.0241
乾燥木材	0.15～0.25
ガラス	0.55～0.75

【応用問題3】GUIからλの入力を可能とする