

熱伝導現象のシミュレーション(2) ～非定常1次元問題～

担当: 高安 亮紀

目的

【前回まで】

定常状態の解を求めており、すべての点に対する値が同時に求められていた。

- ・今回は、時間の刻み幅を Δt とし、ステップ毎に温度を表示する方法を学ぶ。
- ・前回同様、差分法で近似解を算出するが、代表的な方法3つを紹介する。
- ・本授業では、まず陽解法を例に、プログラムの作成方法を学ぶ。

【演習】

- ・陽解法を踏まえ、陰解法、クランク・ニコルソン法を作成し、それぞれを Δt 刻みでグラフに表示できるようにする

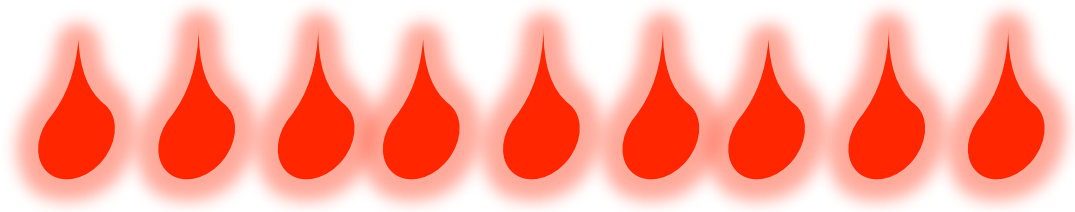
※「熱伝導現象のシミュレーション」をしっかり理解してから授業に臨むこと。

1次元熱伝導現象(非定常)

- ・時間の刻み幅を Δt とし、ステップ毎に増加する温度を可視化する※両端の温度は固定



一様体積発熱 f



- ・単位時間あたりに増加する温度を近似する

- ・一次元熱伝導(定常問題)は以下で記述された。

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \cdots \text{棒の内部} \\ u_1 = 0, u_n = 0 \quad \cdots \text{棒の端} \end{array} \right.$$

- ・単位時間あたりに増加する温度を、時間 t による微分と座標 x による2階微分で以下のように表す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \cdots \text{棒の内部} \\ u_1 = 0, u_n = 0 \quad \cdots \text{棒の端} \end{array} \right.$$

・差分近似(3つの解法)

すべての微分を差分で近似する。

- 陽解法
 - 時間に対して前進差分、位置に対して中心差分を用いる
- 陰解法
 - 時間に対して後退差分、位置に対して中心差分
- クランク-ニコルソン法
 - 陰解法的一种、時間 $(k + 1/2)$ で中心差分

・陽解法 (Explicit method)

- ・時間に対して前進差分にすると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割した要素数 n ($2 \leq i \leq n-1$)

- ・整理すると、以下のような漸化式となる。 k ステップ目の温度から $k+1$ ステップ目の温度を容易に求められる。

$$u_i^{(k+1)} = (1 - 2c)u_i^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

- ・収束条件: $c \leq 1/2$

・陽解法のプログラムを作成

(1) u_0 (初期温度)から dt 時間後の温度 u を求める

```
function u = theat1d(u0,n,dt)
% 熱伝導シミュレーション (1次元、非定常、陽解法)
% u0: 温度の初期値
% n: 節点の数
% dt: 時間の刻み幅

d = 5; % 棒の長さ
f = 20; % 発熱量
h = d/(n - 1); % 分割の幅
c = dt/h^2;
u = zeros(n,1); % 初期化
u(1) = 0;
u(n) = 0;
for i=2:n-1
    u(i) = (1 - 2*c)*u0(i) + c*u0(i+1) + c*u0(i-1) + dt*f;
end
```

<実行例>

```
>> n=5; dt=0.25; u0=zeros(n,1)
```

```
>> u = theat1d(u0,n,dt)
```

u =

0

5

5

5

0

・陽解法のプログラムを作成

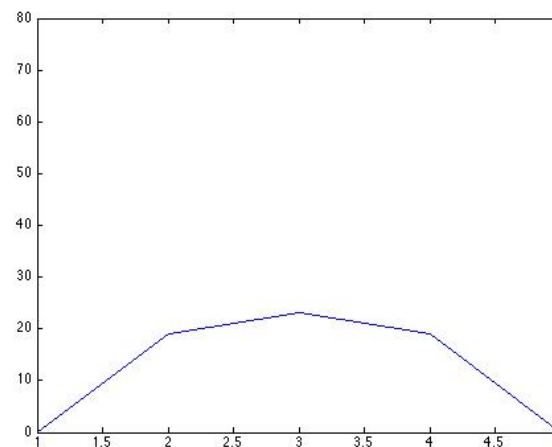
(2) タイムステップ Δt 毎にグラフに出力し、 k 回目まで繰り返す

```
function theat1d_loop(n,dt,loop)
    u = zeros(n,1);
    for k=1:loop
        u = theat1d(u,n,dt);

        plot(u)
        axis([1 n 0 80]) % グラフの設定
        pause(dt) % dt秒、処理の一時停止
    end
```

<実行例>

>> theat1d_loop(n,dt,20)



・陰解法(Implicit method)

- ・時間に対して後退差分にすると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割した要素数 $n(2 \leq i \leq n-1)$

- ・整理すると、以下のようにになる。 Δt 毎に方程式を解く必要があるため、陽解法より煩雑、しかし常に数値的に安定する。

$$(1 + 2c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} = u_i^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

・陰解法のプログラムを作成

(1) u_0 (初期温度)から dt 時間後の温度 u を求める

```
function u = theatl2(u0,n,dt)
% 熱伝導シミュレーション (1次元、非定常、陰解法)
% u0: 温度の初期値, n: 節点の数, dt: 時間の刻み幅

d = 5; % 棒の長さ
f = 20; % 発熱量
h = d/(n - 1); % 分割の幅
c = dt/h^2;
A = zeros(n); b = zeros(n,1); % 初期化
A(1,1) = 1; b(1) = 0; % u(1) = 0
A(n,n) = 1; b(n) = 0; % u(n) = 0
for i=2:n-1
    % 
end
u = A\b;
```

考え方はheat1d.mと同様。
前回のスライドpp.7-9を
参照のこと

(2) タイムステップ dt 毎にグラフに出力し、 k 回目まで繰り返す
陽解法と同様

・クランク-ニコルソン法 (Crank-Nicolson method)

・kステップ目とk+1ステップ目の平均を取る方法。

方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} \right) = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割した要素数 $n(2 \leq i \leq n-1)$

・整理すると、以下のようになる。 Δt 毎に方程式を解く必要がある。
本手法が最も正確な数値を求めることができる。

$$(2 + 2c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} = (2 - 2c)u_i^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + 2f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

・クランク・ニコルソン法のプログラムを作成

(1) u_0 (初期温度)から dt 時間後の温度 u を求める

```
function u = theat1d3(u0,n,dt)
% 熱伝導シミュレーション (1次元、非定常、クランク・ニコルソン法)
% u0: 温度の初期値, n: 節点の数, dt: 時間の刻み幅

d = 5; % 棒の長さ
f = 20; % 発熱量
h = d/(n - 1); % 分割の幅
c = dt/h^2;

A = zeros(n); b = zeros(n,1); % 初期化
A(1,1) = 1; b(1) = 0; % u(1) = 0
A(n,n) = 1; b(n) = 0; % u(n) = 0
for i=2:n-1
    % [Blank orange box]
end
u = A\b;
```

考え方はheat1d.mと同様。
前回のスライド pp.7-9を
参照のこと

(2) タイムステップ dt 毎にグラフに出力し、 k 回目まで繰り返す
陽解法と同様

【応用】GUIからmethodを選択し、グラフを表示

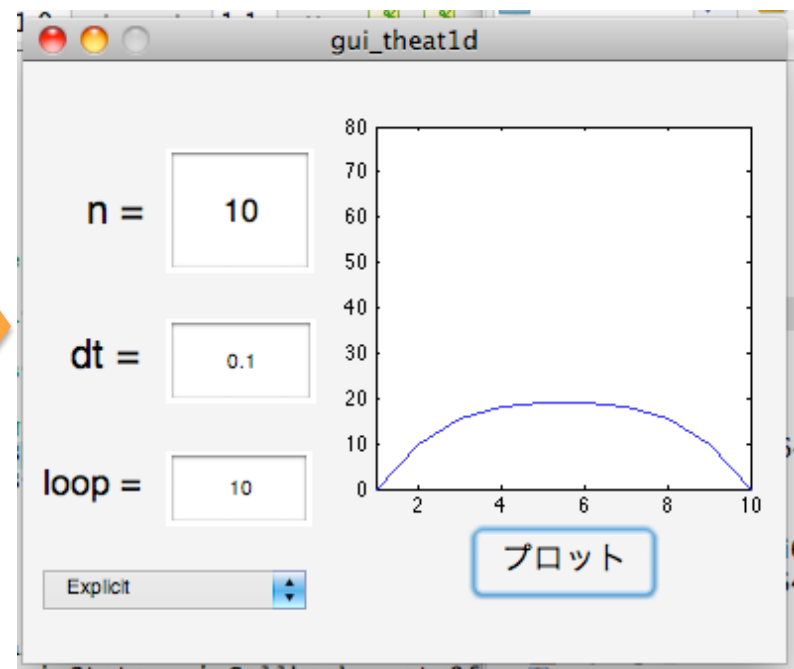
・popup-menuで選択



・陽解法
を選択

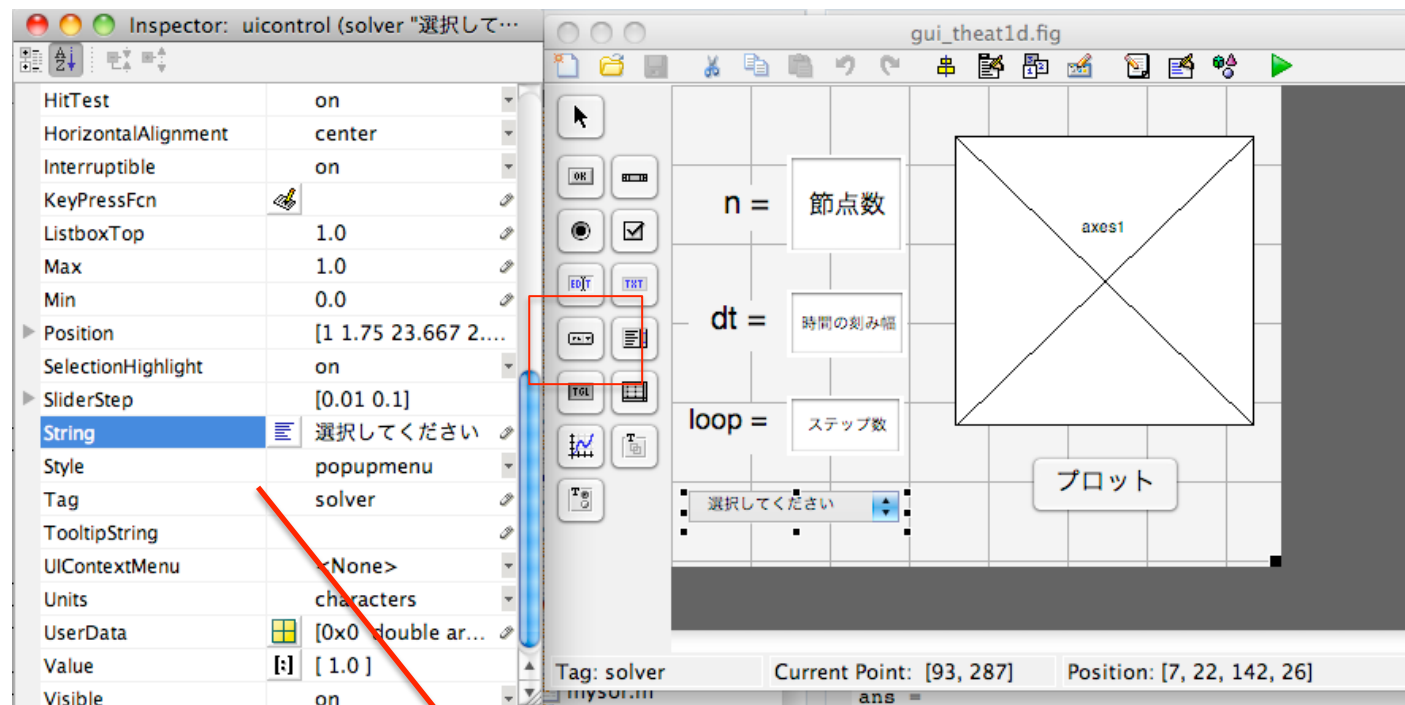


・「プロット」ボタンを押してグラフ表示



【ヒント】popup-menuの使い方

- ・GUIDEでsolver タグを使います。「String」に選択項目を入力します。



Explicit
Implicit
Crank-Nicolson

【ヒント】 popup-menuを選択し、ボタンを押した時のコールバック

1、popup-menuのCallback

メニューバーから選択した文字列を取り出し、数値に変換する。

2、push buttonのCallback

①テキストに入力した、節点数、時間の刻み幅、タイムステップをそれぞれ定義

②選択した方法により、呼び出す関数が異なるため、switch文、またはif分を使う

例) popup-menuで選択した値をsolverとして定義した場合

```
switch solver
    case 'Explicit' % 陽解法
        関数
    case 'Implicit' % 陰解法
        関数
    case 'Crank-Nicolson' % クランク・ニコルソン法
        関数
    otherwise
        error('解法を正しく選んでください')
end
```