

熱伝導現象のシミュレーション(3) ～非定常2次元問題～

担当: 高安 亮紀

目的

- ・1次元熱伝導同様に、非定常の2次元熱伝導について、差分法で近似解を算出する方法を学ぶ

【演習】

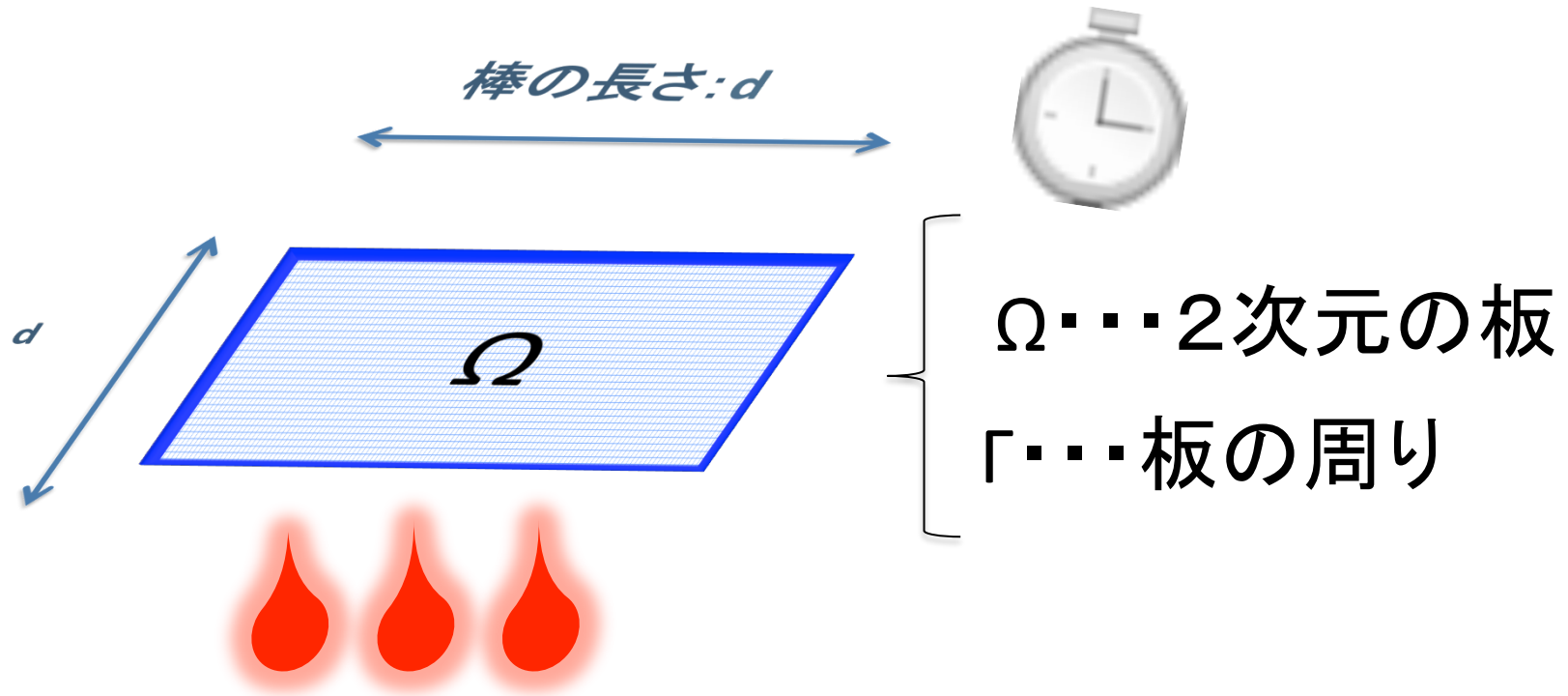
- ・非定常の2次元熱伝導を陽解法、陰解法、クランク・ニコルソン法で作成し、それぞれを Δt 刻みでグラフに表示できるようにする。



「熱伝導現象のシミュレーション(1),(2)」をしっかりと理解してから授業に臨むこと。

・2次元熱伝導現象（非定常）

- ・一定の火力で板を裏側から熱し続ける。時間の刻み幅を Δt とし、ステップ毎に増加する温度を可視化する。
- ※板の周りの温度は固定



・単位時間あたりに増加する温度を近似

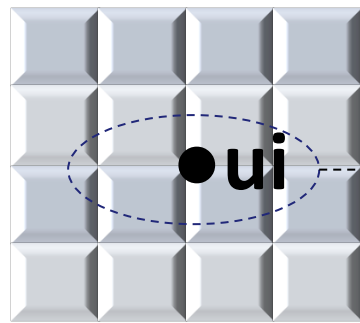
- ・二次元熱伝導(定常)は以下のようにできた。

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f & \cdots \text{板の内部} \\ u = 0 & \cdots \text{板の周り} \end{array} \right.$$

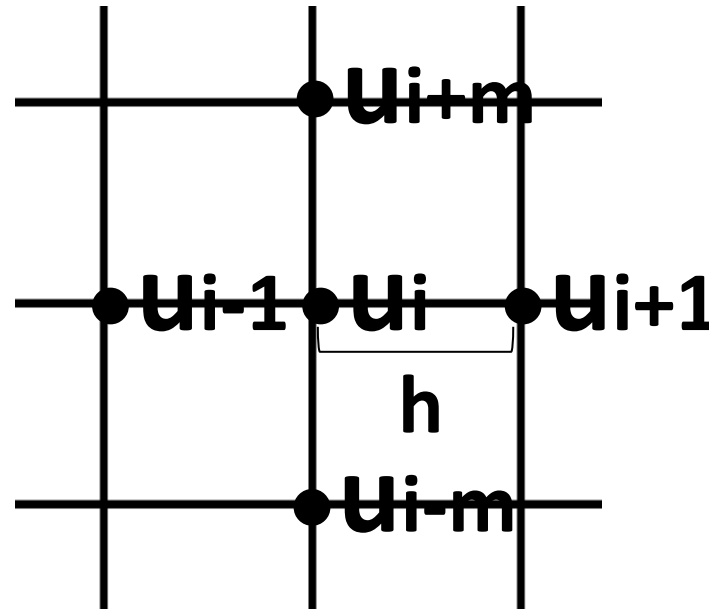
- ・単位時間あたりに増加する温度を、
時間による微分と座標 x 、 y による2階微分で表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f & \cdots \text{板の内部} \\ u = 0 & \cdots \text{板の周り} \end{array} \right.$$

【復習】2次元熱伝導現象の離散化



節点(格子点)



縦:x軸方向

横:y軸方向

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+m} - 2u_i + u_{i-m})$$

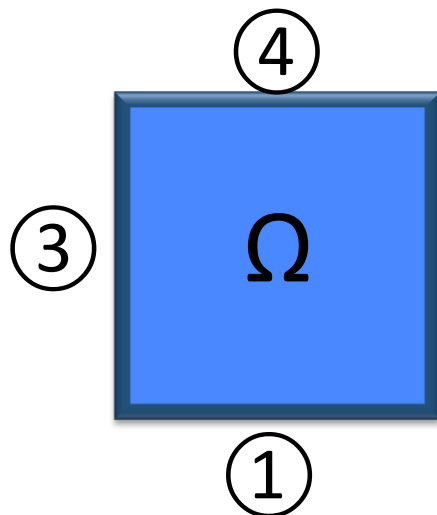
・差分法で2次元熱伝導方程式を離散化

【in Ω 】

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \right.$$

離散化→次ページで陽解法、陰解法、クランクニ科尔ソン法を説明

【on Γ 】



$$\textcircled{1} u_1 \sim u_m = 0$$

$$\textcircled{2} u_{km} = 0, k = 1 \sim m$$

$$\textcircled{3} u_{(k-1)m+1} = 0, k = 1 \sim m$$

$$\textcircled{4} u_{(m-1)m+1} \sim u_{m^2} = 0$$

・陽解法 (Explicit method)

- ・時間に対して前進差分をとると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i-m}^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} - 4u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)} + u_{i+m}^{(k)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割数 m

- ・整理すると以下のような漸化式となり、 k ステップ目の温度から $k+1$ ステップ目の温度を容易に求められる。

$$u_i^{(k+1)} = (1 - 4c)u_i^{(k)} + cu_{i-m}^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + cu_{i+m}^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{m-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

- ・収束条件: $c \leq 1/4$

・陽解法のプログラムを作成

(1) u_0 (初期温度)から dt 時間後の温度 u を求める

```
function u = theat2d(u0,m,dt)
% 熱伝導シミュレーション (2次元、非定常、陽解法)
% m: x,y方向の分割数
% u0: 初期値
% dt: 時間の刻み幅
% u: 1ステップ後の温度

d = 5; % 板の1辺の長さ
f = 20; % 発熱量
h = d/(m - 1); % 分割の幅
n = m^2; % 節点数
c = dt/h^2;
u = zeros(n,1); % 初期化

for jj=1:m
    for ii=1:m
        i = ii + (jj - 1)*m;
        if (ii == 1) || (ii == m) || (jj == 1) || (jj == m)
            % 境界条件 u = 0
            u(i) = 0;
        else % 板の内部
            u(i) = (1 - 4*c)*u0(i) ...
                + c*(u0(i+1) + u0(i-1) + u0(i+m) + u0(i-m)) + dt*f;
        end
    end
end
end
```

heat2d.mと違う
のはココだけ！

・陽解法のプログラムを作成

(2) タイムステップ dt 毎にグラフに出力し、loop回繰り返す

```
function theat2d_loop(m,dt,loop)
% 温度分布を2次元グラフで表示

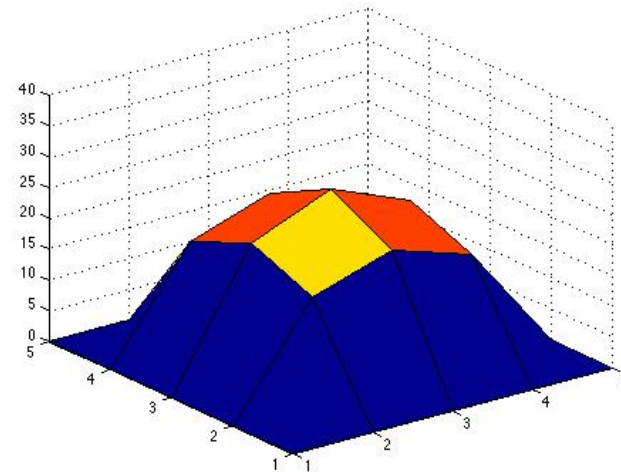
n=m^2;
u = zeros(n,1);

for k=1:loop

    u = theat2d(u,m,dt);

    w = zeros(m);
    for jj=1:m
        for ii=1:m
            i = ii + (jj - 1)*m;
            w(ii,jj) = u(i);
        end
    end

    surf(w)
    axis([1 m 1 m 0 40])
    pause(dt)
end
```



・陰解法(Implicit method)

- ・時間に対して後退差分をとると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i-m}^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} - 4u_i^{(k+1)} + u_{i+1}^{(k+1)} + u_{i+m}^{(k+1)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割数 m

- ・整理すると、以下のようになり、 Δt 毎に方程式を求めなければいけないため、陽解法より煩雑となるが、常に数値的に安定する。

$$(1 + 4c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-m}^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} - cu_{i+m}^{(k+1)} = u_i^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{m-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

・クランク-ニコルソン法 (Crank-Nicolson method)

- ・kステップ目とk+1ステップ目の平均を取る方法。方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i-m}^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} - 4u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)} + u_{i+m}^{(k)}}{h^2} + \frac{u_{i-m}^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} - 4u_i^{(k+1)} + u_{i+1}^{(k+1)} + u_{i+m}^{(k+1)}}{h^2} \right) = f$$

※時間の刻み幅 Δt 、位置の刻み幅 h 、分割数 m

- ・整理すると以下のようになり、 Δt 毎に方程式を求めなければならないが、最も正確な数値を求めることができる。

$$\begin{aligned} & (2 + 4c)u_i^{(k+1)} - cu_{i-m}^{(k+1)} - cu_{i-1}^{(k+1)} - cu_{i+1}^{(k+1)} - cu_{i+m}^{(k+1)} \\ & = (2 - 4c)u_i^{(k)} + cu_{i-m}^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + cu_{i+m}^{(k)} + 2f\Delta t \end{aligned}$$

$$\left(h = \frac{d}{m-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

【演習1】

- 陰解法、クランク-ニコルソン法それぞれのプログラムを作成し、グラフを表示する
 - ヒント1: `heat2d.m`を基に作成する
(端の $u=0$ となる箇所は全く同じ)
 - ヒント2: 前回作成した`theat2d2`(1次元の陰解法),
`theat2d3`(1次元クランクニコルソン法)を参照する
 - ヒント3: 陽解法同様、アルゴリズムとグラフを表示するプログラム、
それぞれ作成

【演習2】

- GUIからmethodを選択し、グラフを表示

- popup-menuで選択



- 陽解法
を選択



- 「プロット」ボタンを押下し、グラフ表示

