熱伝導現象のシミュレーションの応用
～境界条件～

担当: 高安 亮紀

目的

- これまで、境界上の値は固定（例えば、1次元問題では、$u_1 = 0, u_n = 0$）としていた（ディリクレ境界条件）。
- 本講義では、境界で熱の流入出量が一定の**ノイマン境界条件**について学習する。
- ノイマン境界条件に差分法を適用し、1次元、2次元それぞれの場合の熱伝導シミュレーションプログラムを作成する。

- 「熱伝導現象のシミュレーション」において学習した、差分法で近似解を算出する方法を用いる。前回授業までの内容をしっかり理解してから授業に望むこと

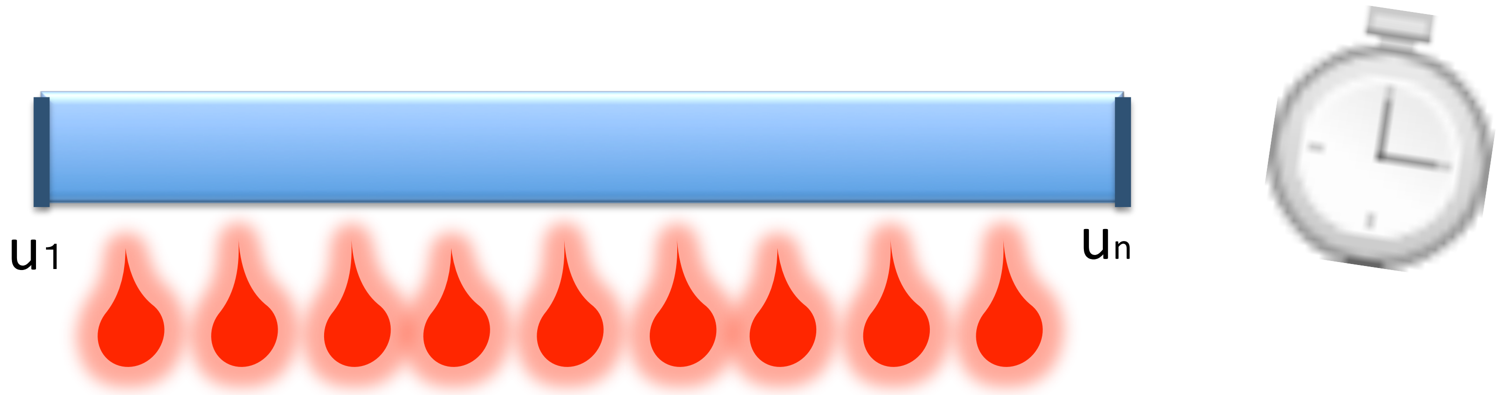
様々な境界条件

- 第1種境界条件 (ディリクレ（Dirichlet）境界条件)
  - 境界上の解の値（温度）を与える
- 第2種境界条件 (ノイマン(Neumann)境界条件)
  - 境界における解の微分値（**熱の流入出量**）を与える
    - 特に熱の流出量が0の場合を断熱条件という
- 第3種境界条件 (ロビン(Robin)境界条件)
  - 第1種と第2種の混合。境界上の解の値とその微分値の線形結合を与える（混合境界条件とは別）

ノイマン境界条件(1次元の場合)

- 境界における導関数の値が指定されている。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \cdots \text{棒の内部} \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial x} = a & \cdots \text{棒の端}
\end{cases}
$$



・【復習】陽解法（Explicit method）

・時間に対して前進差分、位置に対して中心差分にする。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅Δt、位置の刻み幅h、分割した要素数n(2≦**i**≦**n-1**)

・整理すると以下のような漸化式となる。

棒の内部（2≦i≦n-1）

$$u_i^{(k+1)} = (1-2c)u_i^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{n-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

・収束条件：c≦**1/2**

ノイマン境界条件を差分法で近似

・i=1,nでの値を以下のように差分近似する。

熱の流入

$$\frac{u_2^{(k+1)} - u_1^{(k+1)}}{h} = a$$

$$\Rightarrow \quad u_1^{(k+1)} = u_2^{(k+1)} - ah$$

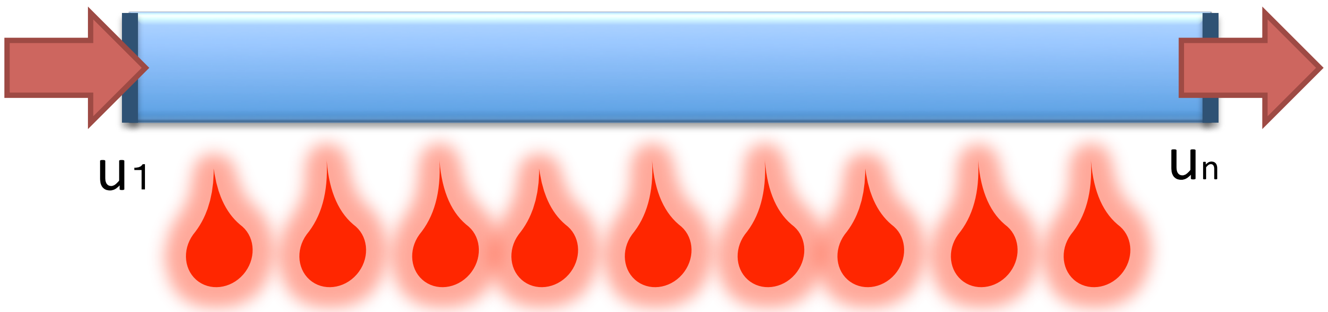
先にu(2)を求める

熱の流出

$$\frac{u_n^{(k+1)} - u_{n-1}^{(k+1)}}{h} = a$$

$$\Rightarrow \quad u_n^{(k+1)} = u_{n-1}^{(k+1)} + ah$$

先にu(n-1)を求める

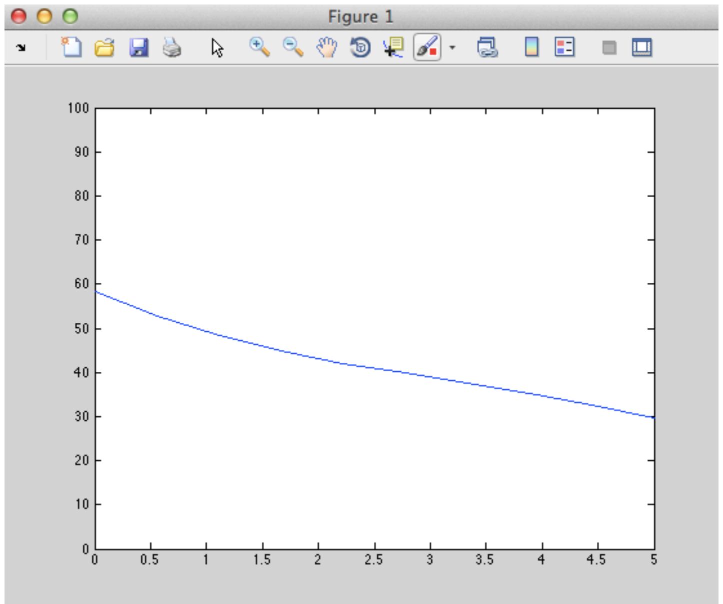


実習1：ノイマン境界条件における1次元熱伝導シミュレーション～陽解法～

- theat1d.m, theat1d_loop.mを基に、境界（u(1),u(n)）をノイマン境界条件に変更し、タイムステップdt毎にグラフに出力し、指定したステップ数loopまで進めるプログラムtnheat1d_loop.mを作成しなさい。

（実行例）

```
>> n=10; dt=0.01; loop=200;
>> tnheat1d_loop(n,dt,loop)
```

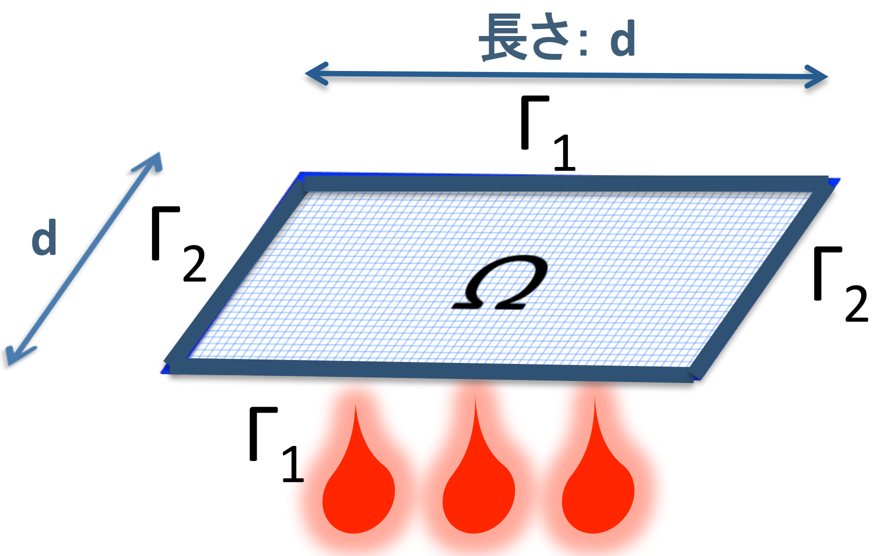


２次元熱伝導現象（混合境界条件）

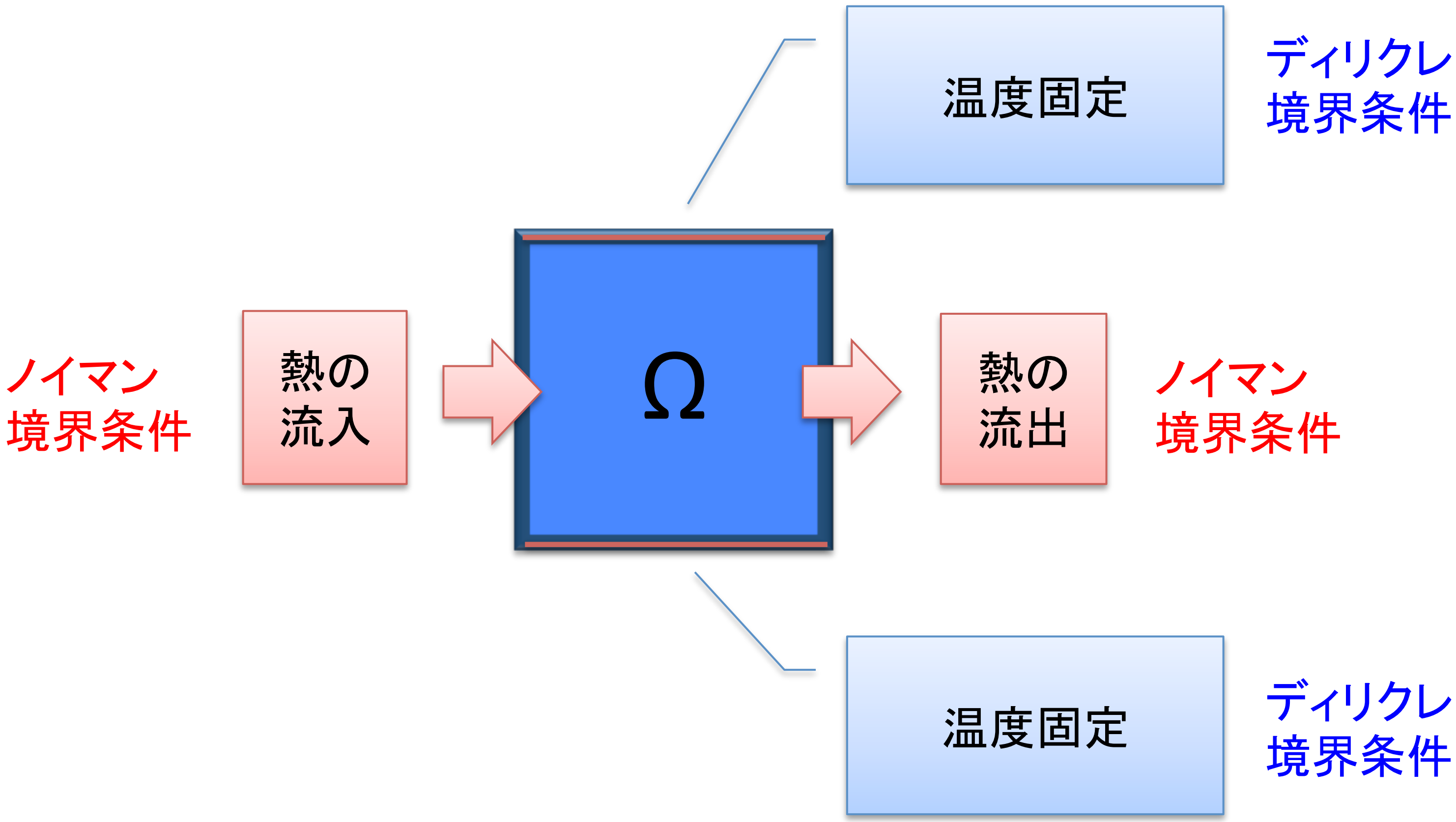
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f & \cdots \ \Omega \text{（板の内部）} \\
u = 0 & \cdots \ \Gamma_1 \text{（板の上下）} \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} = a & \cdots \ \Gamma_2 \text{（板の左右）}
\end{cases}
$$

ディリクレ境界条件（Γ_1）

ノイマン境界条件（Γ_2）

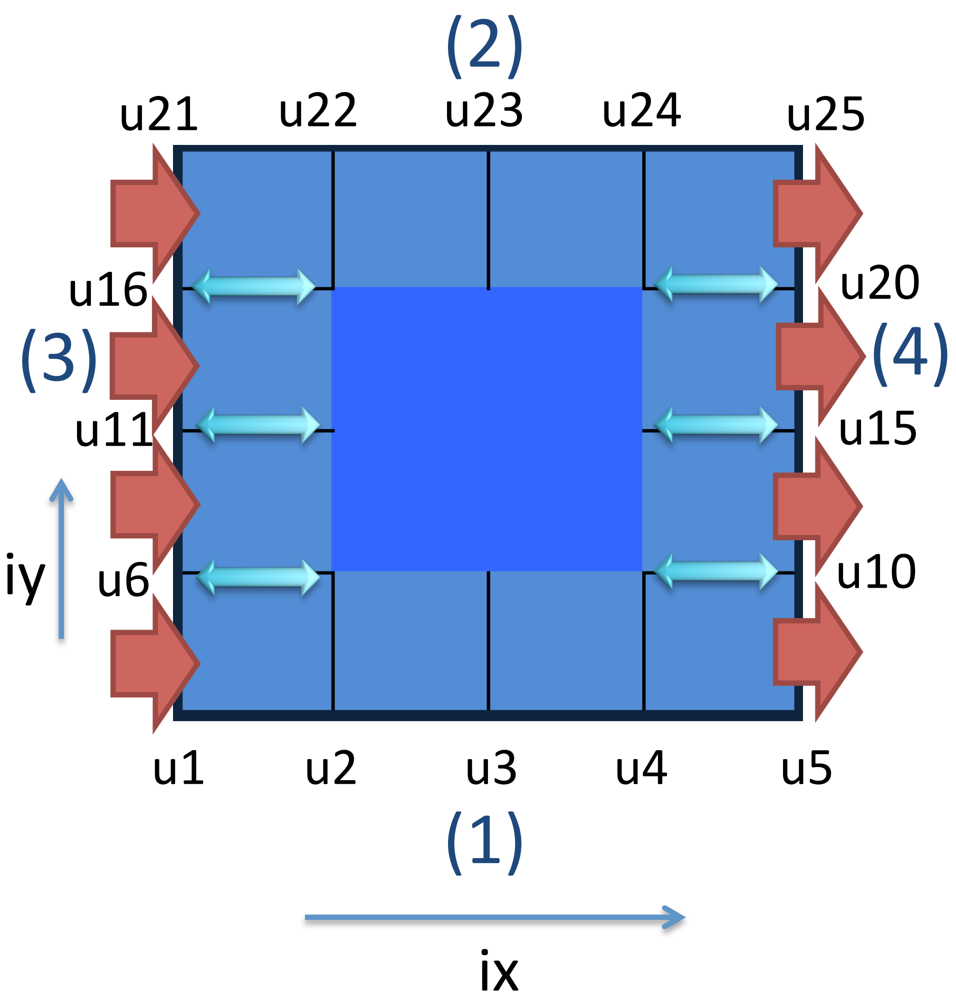


2次元熱伝導現象(混合境界条件)



混合境界条件の考え方

【m=5の場合】



(1) $u_i = 0 \quad (ix = 1:m, iy = 1)$

(2) $u_i = 0 \quad (ix = 1:m, iy = m)$

(3) $u_{i+1} - u_i = -ah \quad (ix = 1, iy = 2:m-1)$

(4) $u_i - u_{i-1} = -ah \quad (ix = m, iy = 2:m-1)$

$\boxed{i = (iy - 1)*m + ix}$

・【復習】陽解法（Explicit method）

・時間に対して前進差分をとると、方程式は以下となる。

$$\frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} - \frac{u_{i-m}^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} - 4u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)} + u_{i+m}^{(k)}}{h^2} = f$$

※時間の刻み幅Δt、位置の刻み幅h、分割数m

・整理すると以下のような漸化式となる。

板の内部（2≦ix≦m-1, 2≦iy≦m-1）

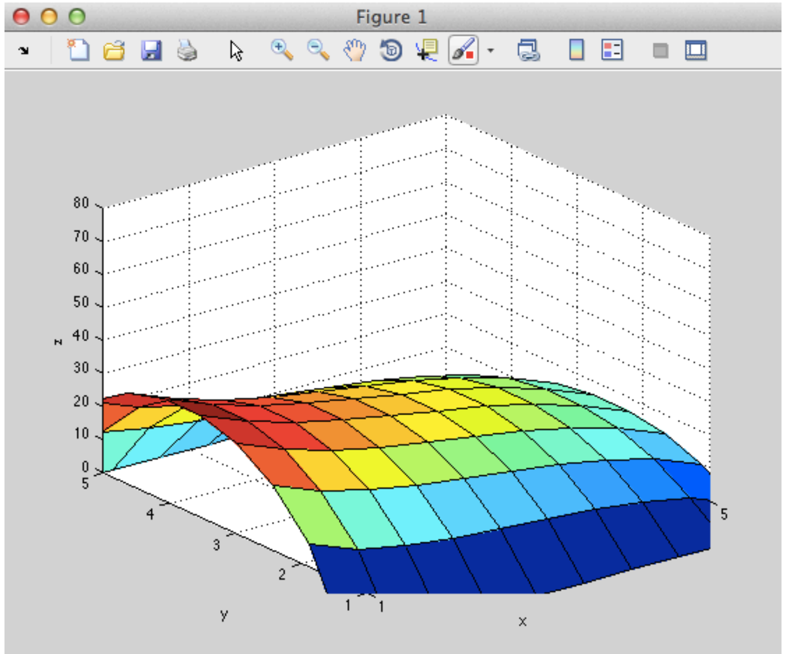
$$u_i^{(k+1)} = (1-4c)u_i^{(k)} + cu_{i-m}^{(k)} + cu_{i-1}^{(k)} + cu_{i+1}^{(k)} + cu_{i+m}^{(k)} + f\Delta t$$

$$\left(h = \frac{d}{m-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{h^2} \right)$$

・収束条件：c≦**1/4**

実習2：混合境界条件における2次元熱伝導シミュレーション～陽解法～

- theat2d.mを基に、境界を混合境界条件に変更し、
- タイムステップdt毎にグラフに出力し、指定したステップ数loopまで進めるプログラムを作成しなさい。



実習3：混合境界条件での１次元熱伝導シミュレーション
～陰解法、クランク･ニコルソン法～

theat1d2.m，theat1d3.mを基に、境界を混合境界条件に変更し、タイムステップdt毎にグラフに出力し、指定したステップ数loopまで進めるプログラムを作成しなさい。

実習4：混合境界条件での2次元熱伝導シミュレーション
～陰解法、クランク･ニコルソン法～

theat2d2.m，theat2d3.mを基に、境界を混合境界条件に変更し、タイムステップdt毎にグラフに出力し、指定したステップ数loopまで進めるプログラムを作成しなさい。