目的

- 現象の数理モデルを用いて、具体的な現象をコンピュータで予測すること＝コンピュータ・シミュレーションを学習する。
- 本講義では、人口の将来予測を、シミュレーションする。
- 人口変動の数理モデル、常微分方程式とその解法を学習し、プログラミングを行い、検証を行う。

常微分方程式とは

- 常微分方程式とは、独立変数t、その関数u(t)、その導関数u'(t),u''(t),・・・$u^{(n)}$(t)の間の関係式について、以下のように表すことができること。

$$F(t,u,u',\cdots,u^{(n)})=0$$

例： 微分方程式 y' = x の解は、

$$y=\frac{x^2}{2}+C$$ （Cは定数）

・任意定数を含んだ形で複数の解をまとめて表したものを一般解といい、条件を課して一意に定まった解を特殊解という。

常微分方程式の解析解

以下の常微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} = y$$

両辺をyで割り、dxを両辺にかけると

$$\frac{1}{y} \cdot dy = dx$$ （変数分離）

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int dx$$

$$\int \frac{1}{y} dx = \log y + C_1$$

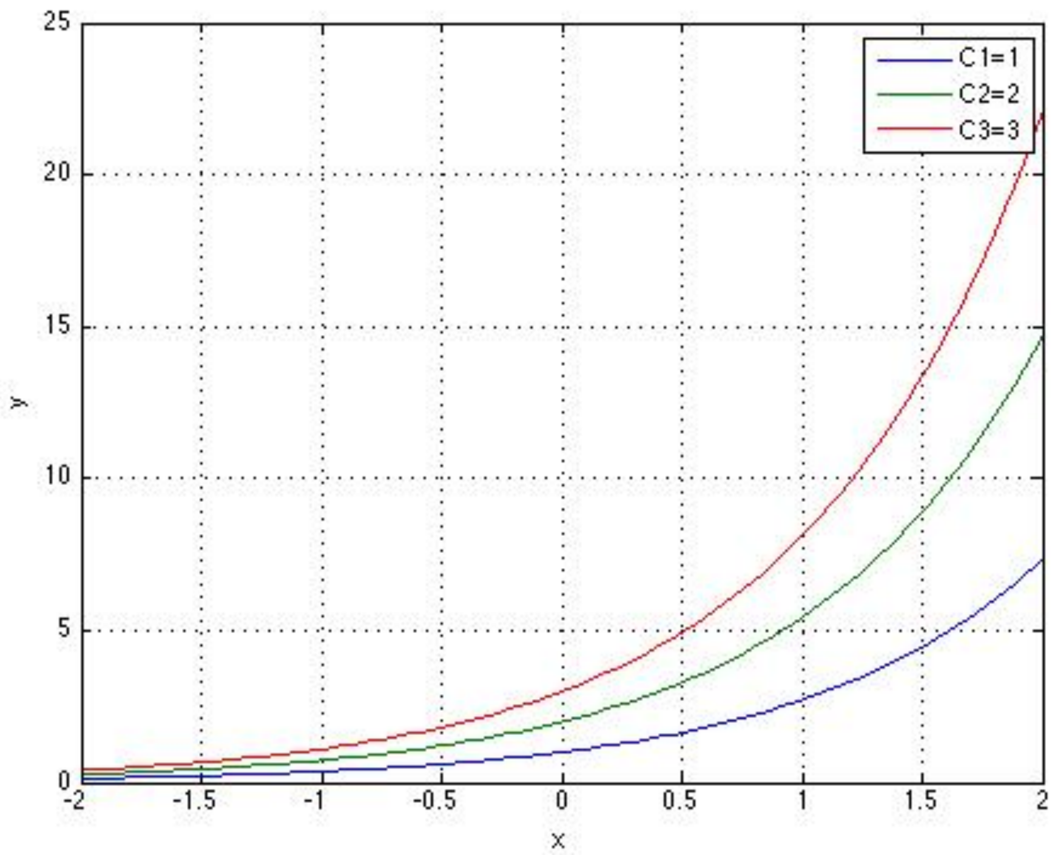
$$\int dx = x + C_2$$

$$\log y = x + C_3$$

$$y = e^{x+C_3} = Ce^{x}$$ （C: 積分定数）

常微分方程式の解

・微分方程式y＝C・e^xのグラフはある曲線群になる。MATLABで確認すると、以下の通り。



常微分方程式の数値解法

- 解析的（数式の変形で解を求めること）でなく、コンピュータを用いて数値的に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の解 y を求める。

- 代表的な数値解法
  - オイラー法
  - ルンゲ・クッタ法

オイラー法

- 刻み幅 h を 0.01 など小さめに設定して下記の計算を繰り返す。

$$y_{n+1} = y_n + h*f(x_n,y_n)$$

- 初期値を x_0, y_0 とすると

$x_1 = x_0 + h;\ \ y_1 = y_0 + h*f(x_0, y_0)$

$x_2 = x_1 + h;\ \ y_2 = y_1 + h*f(x_1, y_1)$

$x_3 = x_2 + h;\ \ y_3 = y_2 + h*f(x_2, y_2)$

のように、x の値を x_0 から h ずつ増やしながら y_0 から y の値を数値的に求めることができる。

人口変動現象の数理モデル

- N(t)がある時刻tにおける、ある国の人口を表すものとする。時間区分Δtにおける出生数と死亡数は、
  - 出生数: αN(t)Δt
  - 死亡数: βN(t)Δt

  （α、βは定数）
- したがって、時間Δtあたりの人口変動は、

$$\Delta N(t) = \alpha N(t)\Delta t - \beta N(t)\Delta t = (\alpha-\beta)N(t)\Delta t$$

- 両辺をΔtで割り、Δt→0とすると、以下の常微分方程式となる。

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad (\gamma = \alpha - \beta)}$$

人口変動現象の数理モデル

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad (\gamma = \alpha - \beta)$$

p.3の解法を用いると

$$\log N(t) = \gamma t + C \quad \cdots (1)$$

$$N(t) = e^{(\gamma t + C)}$$

今、初期条件として、t = t0 とすると

$$\log N(t_0) = \gamma t_0 + C \quad \cdots (2)$$

(1), (2)より、 $\log N(t) - \log N(t_0) = \gamma t + C - \gamma t_0 + C$

$$\log \frac{N(t)}{N(t_0)} = \gamma (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{N(t)}{N(t_0)} = e^{\gamma (t - t_0)}$$

解析解 $\boxed{N(t) = N(t_0) \cdot e^{\gamma (t - t_0)}}$

実習：人口変動の予測シミュレーション

日本の人口

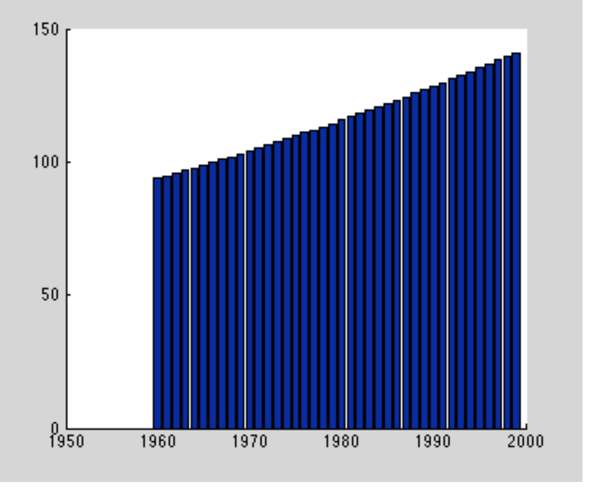
年	人口（100万）
1960	92.8
1970	103.1
1980	116.4
1990	122.7
2000	125.6

$$\gamma = \frac{dN(t)}{dt} \cdot \frac{1}{N(t)}$$

$$\approx \frac{103.1 - 92.8}{1970 - 1960} \cdot \frac{1}{92.8} \approx 0.0111$$

＜実行例＞

```
> r=0.0111;
> dt=1; t=1960; N=92.8;
> bar(t,N);
> hold on
> for k=1:40, N=N+r*N*dt; t=t+dt; bar(t,N); end
```



ヒント

- 記号の違いに惑わされないように
  - x = t
  - y = N(t)
  - f(x,y) = γN(t)
  - h = dt

だと思いましょう。

実習

1. 色々な国、世界の人口データを用いて、変動予測シミュレーションを行ってみよう。
   - 人口データは、Webで検索できます。
2. p.8の解析解と比較してみよう。