

捕食・被食関係のシミュレーション

担当：高安 亮紀

目的

- ロトカ・ボルテラ方程式を用いて、捕食者と被食者の増減関係をシミュレーションする。
- 前回に引き続き、常微分方程式とその解法について学習し、MATLABのODEソルバを用い、プログラミングを行い、検証を行う。

※前回講義の人口変動シミュレーションを理解しておくこと。

ロトカ・ボルテラモデル

- 捕食者と被食者の増減関係をモデル化し、その増殖速度を表現した非線形微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = \gamma_H H - aHP & \begin{array}{l} \text{被食者の個体密度変化} \\ = \text{捕食がない場合の増加} - \text{捕食による減少} \end{array} \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma_P P + bHP & \begin{array}{l} \text{捕食者の個体密度変化} \\ = -\text{捕食がない場合の減少} + \text{捕食による増加} \end{array} \end{cases}$$

H: 被食者の個体数密度, P: 捕食者の個体数密度

a: 捕食率, b: 転換率

γ_H : 被食者の1個体当たりの増加率

γ_P : 捕食者の死亡率

ロトカ・ボルテラモデル

- 被食者と捕食者が出会う確率は、両者の密度の積 $H \times P$ に比例する。
- 捕食者がいない場合、被食者は指数増加。

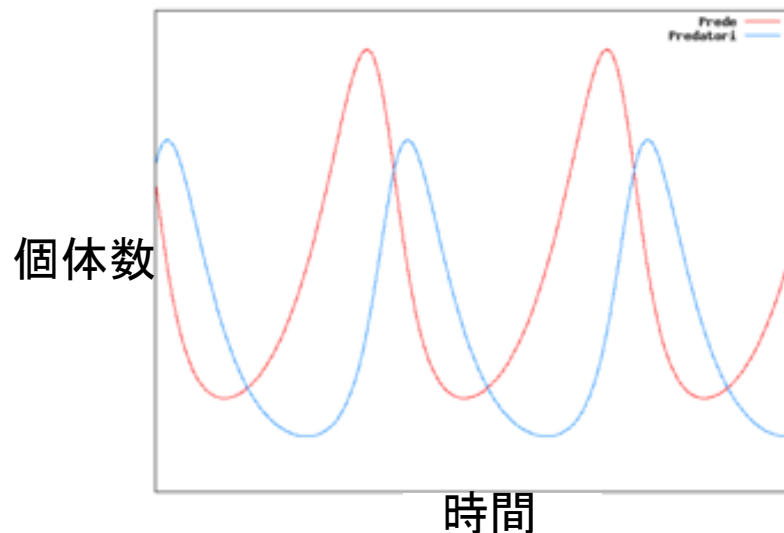
$$\frac{dH}{dt} = \gamma_H H$$

※前回講義の人口変動シミュレーションの式と同様

- 捕食なしでは、捕食者は指数減少。

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma_P P$$

・図のように捕食者が増加すると、被食者が減少し、さらに捕食者が減少する、という時間変化を示すことができる。



青: 捕食者
赤: 被食者

常微分方程式の数値解法

- コンピュータを用いて数値的に微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の解を求める。

- 本講義では、MATLABのODEソルバなどの基礎公式になっているルンゲ・クッタ法について説明する。

ルンゲ・クッタ法

- 微分方程式の数値解法として、4次のルンゲ・クッタ法を使用。
- 基本的な考え方はオイラー法と同じ。

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

h: 刻み幅

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

ODEソルバ

- MATLABでは、微分方程式の解を求めるものとして、odeソルバが用意されている。ode45では、少し工夫したルンゲ・クッタ法が使われている。

ソルバ	問題のタイプ	精度の度合い	使用法
ode45	ノンステッフ	中	ほとんどの場合に使います。最初に実行してみるソルバ。
ode23	ノンステッフ	低	粗い誤差基準を使ったり、わずかにステッフな問題を解く場合
ode113	ノンステッフ	低から高	精密な許容誤差を使ったり、計算の集中したODEファイルを解く場合
ode15s	ステッフ	低から中	ode45が遅い(ステッフなシステム)、または大きい質量行列がある場合
ode23s	ステッフ	低	ステッフなシステムを解くために粗い許容誤差を使ったり、または、大きい定数質量行列がある場合
ode23t	少しステッフ	低	問題がある程度ステッフなだけで、数値減衰が無い解を必要とする場合
ode23tb	ステッフ	低	ステッフなシステムを解くために、大きな誤差の許容量を使うか、または、質量行列がある場合

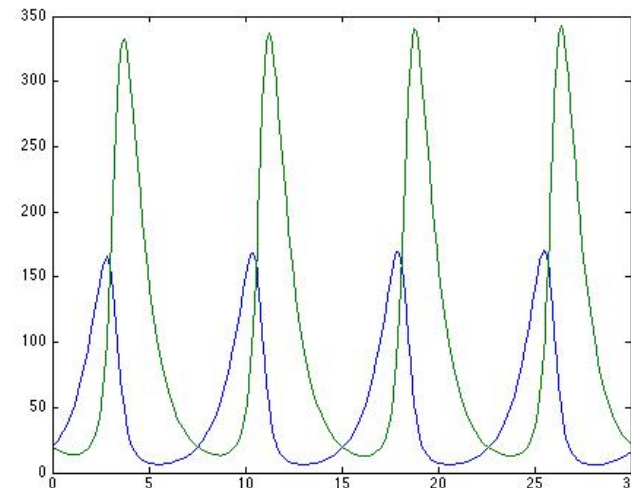
※ODEソルバで使われるアルゴリズムは、精度と設計されたシステムのタイプ(stiffの度合い)により異なる。
 堅い方程式(stiff equation)とは、解の緩やかな変化と急激な変化が混在する方程式で、刻み幅を小さく設定しなければならない場合がある。

ODEソルバでロトカ・ボルテラ方程式を解く

lotka1.m

```
function dy = lotka1(t,y)
rH = 1; % 被食者の1個体当たりの増加率
rP = 1; % 捕食者の死亡率
a = 0.01; % 捕食率
b = 0.02; % 転換率
dy = zeros(2,1);
dy(1) = (rH - a*y(2))*y(1);
dy(2) = (-rP + b*y(1))*y(2);
```

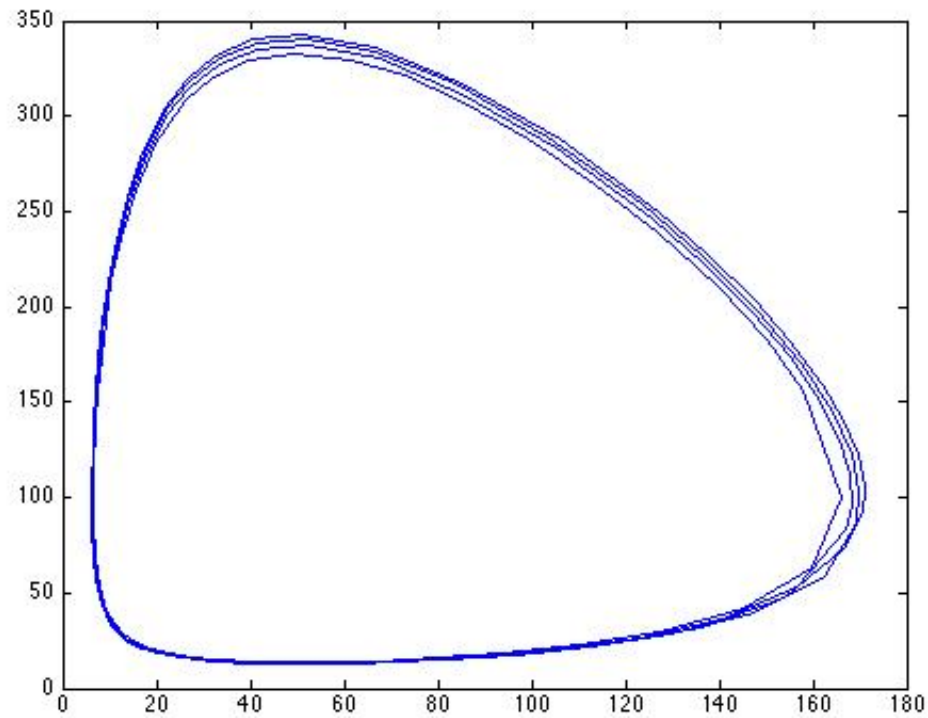
```
>> t = [0, 30]; % tの範囲
>> y0 = [20; 20]; % 個体密度初期値
>> [t,y] = ode45('lotka1',t,y0);
>> plot(t,y)
```



解の軌道

- ・必ず反時計回りの閉軌道(周期解)になる。
→ロトカ・ボルテラモデルの解は必ず周期解になることが証明できる

```
>> plot(y(:,1),y(:,2))
```



実習1:うさぎと山猫

- 右の図は、実際のうさぎと山猫の個体データに基づいている。このデータを用いて、個体数の変化をシミュレーションしましょう。
- ヒント
 1. lotka1.mをもとにlotka2.mを作成
 2. 捕食率などのパラメータを適当に設定
 3. ODEソルバで解く

年	うさぎ	山猫
1850	55	2
1851	80	1
1852	80	1
1853	90	1
1854	70	5
1855	80	13
1856	95	16
1857	75	25
1858	30	14
1859	15	8
1860	20	3

実習2

- 捕食・被食に関する実際のデータを調査し、シミュレーションしてみましょう。
- データはインターネットで調べると色々あります。
 - 魚の漁獲量と魚の数
 - メダカとミジンコ等