

人口変動予測シミュレーション

担当：高安 亮紀

目的

- 現象の数理モデルを用いて、具体的な現象をコンピュータで予測すること＝コンピュータ・シミュレーションを学習する。
- 本講義では、人口の将来予測を、シミュレーションする。
- 人口変動の数理モデル、常微分方程式とその解法を学習し、プログラミングを行い、検証を行う。

常微分方程式とは

- 常微分方程式とは、独立変数 t 、その関数 $u(t)$ 、その導関数 $u'(t), u''(t), \dots, u^{(n)}(t)$ の間の関係式について、以下のように表すことができること。

$$F(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$$

例：微分方程式 $y' = x$ の解は、

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は定数})$$

・任意定数を含んだ形で複数の解をまとめて表したものを一般解
といい、条件を課して一意に定まった解を特殊解という。

常微分方程式の解析解

以下の常微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} = y$$

両辺を y で割り、 dx を両辺にかけると

$$\frac{1}{y} \cdot dy = dx \quad (\text{変数分離})$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int dx$$

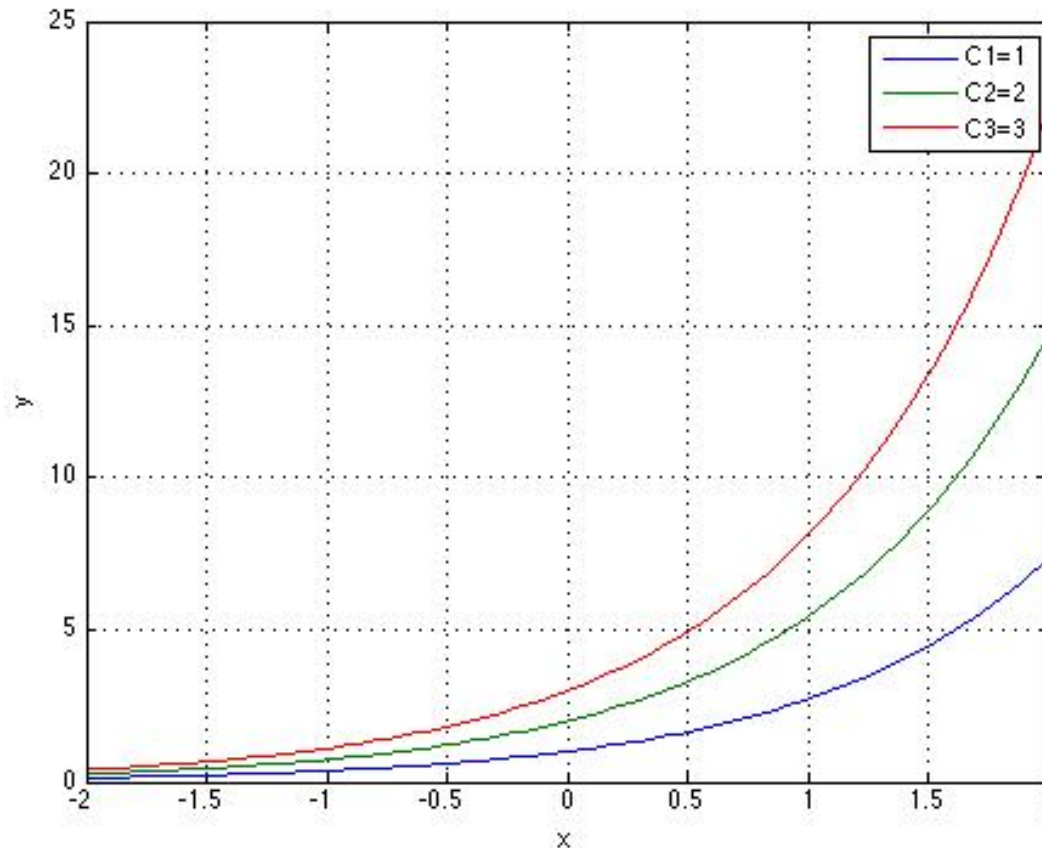
$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{1}{y} dx = \log y + C_1 \\ \int dx = x + C_2 \end{array} \right.$$

➡ $\log y = x + C_3$

➡ $y = e^{x+C_3} = Ce^x \quad (C: \text{積分定数})$

常微分方程式の解

- ・微分方程式 $y = C \cdot e^x$ のグラフはある曲線群になる。
MATLABで確認すると、以下の通り。



常微分方程式の数値解法

- 解析的(数式の変形で解を求めること)でなく、コンピュータを用いて数値的に

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の解 y を求める。

- 代表的な数値解法
 - オイラー法
 - ルンゲ・クッタ法

オイラー法

- 刻み幅 h を 0.01 など小さめに設定して下記の計算を繰り返す。

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n)$$

- 初期値を x_0, y_0 とすると

$$x_1 = x_0 + h; y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h; y_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1)$$

$$x_3 = x_2 + h; y_3 = y_2 + h * f(x_2, y_2)$$

のように、 x の値を x_0 から h ずつ増やしながら y_0 から y の値を数値的に求めることができる。

人口変動現象の数理モデル

- $N(t)$ がある時刻 t における、ある国の人口を表すものとする。時間区分 Δt における出生数と死亡数は、

- 出生数: $\alpha N(t)\Delta t$
- 死亡数: $\beta N(t)\Delta t$ (α, β は定数)

- したがって、時間 Δt あたりの人口変動は、

$$\Delta N(t) = \alpha N(t)\Delta t - \beta N(t)\Delta t = (\alpha - \beta)N(t)\Delta t$$

- 両辺を Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、以下の常微分方程式となる。

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad (\gamma = \alpha - \beta)$$

人口変動現象の数理モデル

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad (\gamma = \alpha - \beta)$$

p.3の解法を用いると



$$\log N(t) = \gamma t + C \quad \cdots (1)$$

$$N(t) = e^{(\gamma t + C)}$$

今、初期条件として、 $t = t_0$ とすると

$$\log N(t_0) = \gamma t_0 + C \quad \cdots (2)$$

$$(1), (2) \text{より、} \log N(t) - \log N(t_0) = \gamma t + C - \gamma t_0 + C$$

$$\log \frac{N(t)}{N(t_0)} = \gamma(t - t_0) \Rightarrow \frac{N(t)}{N(t_0)} = e^{\gamma(t - t_0)}$$

解析解

$$N(t) = N(t_0) \cdot e^{\gamma(t - t_0)}$$

実習：人口変動の予測シミュレーション

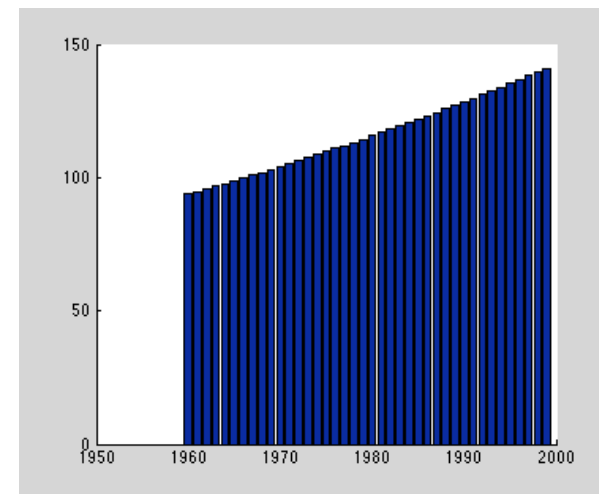
日本の人口

年	人口(100万)
1960	92.8
1970	103.1
1980	116.4
1990	122.7
2000	125.6

$$\gamma = \frac{dN(t)}{dt} \cdot \frac{1}{N(t)}$$
$$\approx \frac{103.1 - 92.8}{1970 - 1960} \cdot \frac{1}{92.8} \approx 0.0111$$

<実行例>

```
> r=0.0111;  
> dt=1; t=1960; N=92.8;  
> bar(t,N);  
> hold on  
> for k=1:40, N=N+r*N*dt; t=t+dt; bar(t,N); end
```



ヒント

- 記号の違いに惑わされないように
 - $x = t$
 - $y = N(t)$
 - $f(x, y) = \gamma N(t)$
 - $h = dt$

だと思ひましょう。

実習

1. 色々な国、世界の人口データを用いて、変動予測シミュレーションを行ってみよう。
 - 人口データは、Webで検索できます。
2. p.8の解析解と比較してみよう。