

平成17年度

卒業論文

1次元バーガース方程式における
有限差分法の誤差解析について

平成18年2月3日

指導教授： 大石 進一 教授

早稲田大学 理工学部 情報学科

1g02p033-9 木原 瞬

目次

1	序論	3
1.1	背景	4
1.2	本論文の目的	4
1.3	本論文の構成	4
2	バーガス方程式の厳密解	5
2.1	はじめに	6
2.2	バーガス方程式	6
2.3	バーガス方程式の厳密解	6
3	中心差分	10
3.1	はじめに	11
3.2	差分法の特徴	11
3.3	中心差分	11
3.4	中心差分における分散誤差	12
4	風上差分	13
4.1	はじめに	14
4.2	式の導入	14
4.3	差分方法の比較	15
4.3.1	比較の方法	15
4.3.2	打ち切り誤差	15
4.3.3	散逸誤差	16
5	厳密解および中心差分と風上差分の比較	17
5.1	はじめに	18
5.2	1次精度風上差分の安定性解析	18
5.3	2次精度中心差分の安定性解析	19
5.4	高次精度風上差分の安定性解析	19
5.5	1次精度風上差分と2次精度中心差分の安定性の比較	20

6	有限要素法	21
6.1	はじめに	22
6.2	1次元有限要素法	22
6.2.1	解析の方法	22
6.2.2	重み付け残差法	22
6.2.3	重み関数	22
7	有限要素法と有限差分法の比較	23
7.1	はじめに	24
7.2	1次元定常熱伝導問題	24
7.3	有限要素法による解法	24
7.4	有限差分法による解法	27
8	結論と今後の課題	29
	謝辞	31
	参考文献	33

第 1 章

序論

1.1 背景

自然科学の分野において、流体や重力場、電磁場に関する自然現象を記述する手段として、偏微分方程式がよく用いられている。このような自然現象は天気予報や飛行機のシミュレーション等を行う上で重要な意味を持っている。そのため、偏微分方程式の解析について、長年にわたり研究されてきた。しかし、現実に関心すべき問題はあまりに複雑なため、解析解を求めることは難しく、不可能である場合が多い。よって、このような状況では解の近似値を求める数値解法が重要であると言える。代表的な数値解法として、有限差分法や有限要素法、有限体積法などがあるが、流体のシミュレーションには有限差分法による数値計算が使われることが多い。有限差分法では計算の手順で離散化を行う必要があり、離散化の手法はいくつかある。どの手法を用いるかにより、精度や安定性、計算の速さは大きく変わってくる。

1.2 本論文の目的

代表的な有限差分法における離散化の手法として、風上差分と中心差分が挙げられるが、計算安定性の面で風上差分が優れていることが経験的に知られている。よって、レイノルズ数が大きい場合の流れを粗い格子を用いて計算する場合等には風上差分を用いるのが一般的である。しかし、風上差分の優位性について数学的な証明はまだされていない。本論文では、風上差分と中心差分の比較を数学的に行うことを目的とする。また、有限差分法と有限要素法についての比較を行う。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、1次元バーガース方程式の厳密解について述べる。第3章では、中心差分について述べる。第4章では、風上差分について述べる。第5章では、中心差分と風上差分を比較する。第6章では、有限要素法について述べる。第7章では、有限要素法と有限差分法を比較する。そして、第8章では、結論と今後の課題を述べる。

第 2 章

バーガース方程式の厳密解

2.1 はじめに

この章では1次元バーガス方程式の厳密解の解法について説明する。バーガス方程式とは、流れの基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式から圧力項を省略した方程式であり、厳密解が知られている。また、この論文では1次元バーガス方程式のみを扱うことにする。

2.2 バーガス方程式

1次元バーガス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である。ただし、 t は時間、 x は位置、 u は流体の速度、 Re は流体の粘性を表すパラメータとし、以後これらの記号を用いる。また、左辺第二項は移流項、右辺第一項は粘性項となっている。

2.3 バーガス方程式の厳密解

1次元非線形バーガス方程式の解析解は物理的考察を加えることにより、無限遠の流速が有限で、無限遠の流速の勾配がゼロの時に解析解を求めることができる。1次元非線形バーガス方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である。 x 座標の負の無限遠に正の流速を置き、正の無限遠に負の流速を置いたときに2つの流れは左右から衝突し、そこに流速のギャップが生じる。このギャップはその位置に留まっておらず、流速の絶対値の大きい方が勝り、ギャップは流速の大きい方から小さい方にある速度で移動する。このような衝突後にギャップが一定速度で移動している段階になった時の解析解を導く。このギャップとともに移動する座標を x_1 とするならば、この座標から見れば流れは定常に見えるはずである。

$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x_1} = U$ とすると、 x_1 と x の関係は、

$$x_1 = x - Ut \tag{2.1}$$

である。バーガス方程式を x_1 座標に変換する。まず、時間微分を考えると、

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_1} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x_1}$$

であるため、

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x = -U \frac{\partial u}{\partial x}$$

を得る。この式と $\partial x_1 / \partial x = 1$ を使えば、バーガース方程式は次のように定常の常微分方程式に変形できる。

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ -U \frac{du}{dx_1} + u \frac{du}{dx_1} &= \frac{1}{Re} \cdot \frac{d^2 u}{dx_1^2} \end{aligned}$$

上式に変形を加えれば、

$$\frac{d}{dx_1} \left[-Uu + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{Re} \cdot \frac{du}{dx_1} \right] = 0$$

ここで、 x_1 に対して積分を行うと以下の式となる。ただし、 C は積分定数とする。

$$-Uu + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{Re} \cdot \frac{du}{dx_1} = C \quad (2.2)$$

であり、 $u = u(x_1)$ である。バーガース方程式を解くための境界条件を次のようにすれば比較的簡単に解析解が得られる。

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= U_w, \\ \left. \frac{du}{dx_1} \right|_{x_1 \rightarrow -\infty} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\infty) &= U_e, \\ \left. \frac{du}{dx_1} \right|_{x_1 \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned}$$

式 (2.2) にこれらの境界条件を加えると

$$-UU_w + \frac{1}{2}U_w^2 = C, \quad (2.3)$$

$$-UU_e + \frac{1}{2}U_e^2 = C \quad (2.4)$$

となり、式 (2.3) から式 (2.4) を引くと

$$-U(U_w - U_e) + \frac{1}{2}(U_w^2 - U_e^2) = 0$$

となり、さらに $(U_w - U_e)$ で両辺を割ると

$$U = \frac{U_w + U_e}{2}$$

を得る。また、式 (2.3) より、

$$C = -\frac{U_w + U_e}{2}U_w + \frac{1}{2}U_w^2$$

となる。よって、

$$C = -\frac{U_w U_e}{2}$$

となる。ここで式 (2.2) は

$$\begin{aligned} -\frac{U_w + U_e}{2}u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{Re} \cdot \frac{du}{dx_1} &= -\frac{U_w U_e}{2}, \\ u^2 - (U_w + U_e)u + U_e U_w &= \frac{2}{Re} \cdot \frac{du}{dx_1}, \\ (u - U_w)(u - U_e) &= \frac{2}{Re} \cdot \frac{du}{dx_1}, \\ \frac{2}{Re} \cdot \frac{\frac{du}{dx_1}}{(u - U_w)(u - U_e)} &= 0, \\ \frac{2}{Re} \left(\frac{1}{U_e - U_w} \cdot \frac{du}{u - U_e} + \frac{1}{U_w - U_e} \cdot \frac{du}{u - U_w} \right) &= 1, \\ \frac{2}{Re(U_w - U_e)} \left(\frac{du}{u - U_e} + \frac{-du}{U_w - u} \right) &= 1 \end{aligned}$$

である。ここでは $U_w \geq u \geq U_e$ の仮定のもとで x_1 で積分すると以下の式を得る。ただし、 C_1 は定数とする。

$$\begin{aligned} \frac{2}{Re(U_w - U_e)}(-\log(u - U_e) + \log(U_w - u)) &= x_1 + C_1, \\ \frac{2}{Re(U_w - U_e)} \log \frac{U_w - u}{u - U_e} &= x_1 + C_1 \end{aligned}$$

ここで式 (2.1) を上式に代入する。

$$\begin{aligned} \log \frac{U_w - u}{u - U_e} &= \frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - Ut + C_1), \\ U_w - u &= (u - U_e)e^{\frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - Ut + C_1)}, \\ (1 + e^{\frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - Ut + C_1)})u &= U_w + U_e e^{\frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - Ut + C_1)}, \\ u &= U_e + \frac{U_w - U_e}{1 + e^{\frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - Ut + C_1)}} \end{aligned}$$

ここで C_1 を求めなければならない。最も簡単なのは $C_1 = 0$ の時である。この C_1 の意味は $t = 0$ の時に $x = 0$ の流速が $(U_w + U_e)/2$ であることが上式から分かる。このように $t = 0$ の時にギャップが原点 $x = 0$ にあるとすれば最終的に流速分布は

$$u(t, x) = U_e + \frac{U_w - U_e}{1 + e^{\frac{Re(U_w - U_e)}{2}(x - \frac{U_w + U_e}{2}t)}} \quad (2.5)$$

となる。

第 3 章

中心差分

3.1 はじめに

この章では、偏微分方程式を数値的に説く手法として有限差分法について説明する。また、差分における離散化の方法として、中心差分を紹介する。

3.2 差分法の特徴

差分法は偏微分方程式の数値解法の一つであり、偏微分方程式を差分近似する方法である。得られた方程式は代数方程式として解くことができる。つまり、差分法は未知関数の導関数を対応する差分商で置き換えて差分方程式に帰着させ、この差分方程式を代数方程式として数値的に解く方法である

3.3 中心差分

関数 $f(x)$ の点 x における 1 回微分 $\partial u/\partial x(x)$ の値を求めることを考える。 Δx を微量とし、 $u(x + \Delta x)$ を x の周りでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x) &= \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x) + \dots \\ &= u(x) + \Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

と $\partial u/\partial x(x)$ を近似できる。これを前進差分と呼ぶ。また、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき右辺は微分の定義になる。一方、 $u(x - \Delta x)$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x) &= \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x) + \dots \\ &= u(x) - \Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

となる。この場合は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

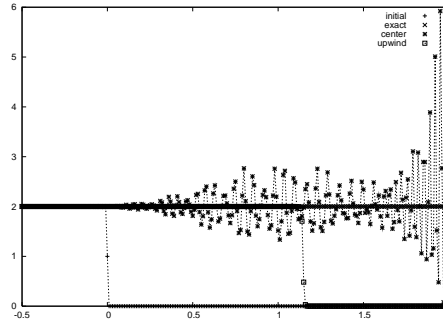
と $\partial u/\partial x(x)$ を近似できる。これを後退差分と呼ぶ。さらに 2 つのテイラー展開した式より、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

のような近似を得る。これを中心差分と呼ぶ。中心差分は前進差分、後退差分よりも打ち切り誤差の精度が高い。

3.4 中心差分における分散誤差

中心差分では Δx が小さくないと、変数の値が格子点間隔毎に交互に正負の値を繰り返すという、空間振動が生じることが知られている。収束解が得られなくなることもあるため、数値計算を安定して実行するため風上差分がよく使用されている。



図(3.1)はバーガス方程式を中心差分で計算した結果と風上差分で計算した結果を1つのグラフにしたものである。風上差分は一般的に使われている離散化手法であり、風上差分の結果と比べると、中心差分の結果が振動しているのが分かる。中心差分は計算を行う際に、1つ飛ばしの2点を参照するため、振動しやすくなる。

第 4 章

風上差分

4.1 はじめに

この章では、風上差分について説明する。また風上差分の誤差原因について述べる。

4.2 式の導入

微分方程式の空間微分項を近似する場合、境界などを除き主に中心差分を用いて近似するのが一般的である。しかし、レイノルズ数が大きい場合の流れを粗い格子を用いて計算する場合、中心差分を用いると数値的に不安定なることが知られている。そのような場合でも、風上差分と呼ばれる差分法を使えば安定に計算できる場合がある。そのため、風上差分は流体力学の数値計算でしばしば用いられる

まず、1次精度の風上差分は以下ようになる

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & (u_i \geq 0 \text{ のとき}) \\ u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & (u_i < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし、 x_i は位置とし、 u_i は位置 x_i における流体の速度、 Δx は格子幅とする。この式を絶対値を使ってまとめて書くと次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{|u_i| \Delta x}{2} \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

また、2次精度の風上差分は以下ようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} u_i \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} & (u_i \geq 0 \text{ のとき}) \\ u_i \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} & (u_i < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この式を絶対値を使ってまとめて書くと次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{-u_{i+2} + 4(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{|u_i| (\Delta x)^3}{4} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{4(\Delta x)^4}$$

さらに、3次精度の風上差分は以下ようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} u_i \frac{2u_{i+1} + 3u_i - 6u_{i-1} + u_{i-2}}{6\Delta x} & (u_i \geq 0 \text{ のとき}) \\ u_i \frac{-u_{i+2} + 6u_i - 3u_{i+1} - 2u_{i+2}}{6\Delta x} & (u_i < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この式を絶対値を使ってまとめて書くと次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{|u_i|(\Delta x)^3}{12} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

ちなみに、 u は 4 階微分まで可能とする。

ここで「 n 次」というのは、 $f(x)$ を x_i のまわりで Taylor 展開して差分式の精度を評価するとき、最大誤差項が $O((\Delta x)^n)$ であることを意味している。一般に高次の差分法ほど高精度であるが、多くの離散店の情報を必要とするため、プログラミングや計算に手間が掛かってしまう。

風上差分と中心差分のどちらを選択するかにより、計算の安定性、精度、収束の速度等が変わってくる。

4.3 差分方法の比較

4.3.1 比較の方法

1 次精度風上差分、2 次精度風上差分、および 3 次精度風上差分を比較するにあたり、打ち切り誤差、散逸誤差、分散誤差の 3 つの誤差に注目してみる。

4.3.2 打ち切り誤差

点 x に対して、 $x + \Delta x$ の点 (Δx は定数) における関数のフーリエ展開の式

$$u(x + \Delta x) = \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \cdot \frac{\partial^{(n)} u}{\partial x^n}(\xi)$$

(ただし、 $x < \xi < x + \Delta x$)

から、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{|u_i|\Delta x}{2} \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

が導けるため、1 次精度風上差分の打ち切り誤差は $O(\Delta x)$ である。

同様に他の差分式について打ち切り誤差を導くと、2 次精度風上差分では

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i \frac{-u_{i+2} + 4(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{|u_i|(\Delta x)^3}{4} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{4(\Delta x)^4} + O((\Delta x)^2)$$

となる。次に3次精度風上差分について導くと

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{|u_i|(\Delta x)^3}{12} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4} + O((\Delta x)^3)$$

となる。中心差分について導くと

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

となる。よって、1次精度風上差分の打ち切り誤差は $O(\Delta x)$ 、2次精度風上差分の打ち切り誤差は $O((\Delta x)^2)$ 、3次精度風上差分の打ち切り誤差は $O((\Delta x)^3)$ 、および中心差分の打ち切り誤差は $O((\Delta x)^2)$ であることが分かる。よって打ち切り誤差だけを見ると、1次精度風上差分は誤差が大きく、差分が高次になればなるほど誤差は減っていくと思われる。また、中心差分の打ち切り誤差は2次精度風上差分と同じ精度である。

4.3.3 散逸誤差

1次精度風上差分の式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{|u_i|\Delta x}{2} \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

である。この式において、右辺第一項は中心差分を表している。そして、第2項が1次精度風上差分により新たに加えられた項である。この第二項は粘性の働きをする2階微分 $\partial^2 u / \partial x^2$ に格子幅 Δx に比例する係数が掛かったものである。そして、この項が実際の粘性を覆い隠してしまい、誤差となってしまう。特に、高レイノルズ数の流れであったり、 Δx を小さく取れなかったとき、物理粘性に対する人工粘性の割合が高くなり、計算の精度が悪くなってしまう。同様に2次精度、3次精度の式について考えてみる。まず、2次精度風上差分の式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{-u_{i+2} + 4(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{|u_i|(\Delta x)^3}{4} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{4(\Delta x)^4}$$

である。この式では、第二項で4階微分 $\partial^4 u / \partial x^4$ に格子幅 $(\Delta x)^3$ に比例する係数が掛かっている。この式でもこの項は邪魔な働きをするが、 Δx が3乗されているため、影響は少ないと言える。さらに、3次精度風上差分の式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{|u_i|(\Delta x)^3}{12} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

である。この式も2次精度と同じく、第二項の Δx が3乗されているため、影響は少ない。

第 5 章

厳密解および中心差分と風上差分の比較

5.1 はじめに

この章では第2章で求めたバーガス方程式の厳密解、および中心差分と風上差分の比較をおこなう。なぜ中心差分に比べ、風上差分が使われているかを数学的に説明する。

5.2 1次精度風上差分の安定性解析

まず、バーガス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

の時間項をオイラー陽解法、移流項を1次精度風上差分、拡散項を2次精度中心差分で離散化すると

$$\frac{u_{t+1,i} - u_{t,i}}{\Delta t} = -u \frac{u_{t,i} - u_{t,i-1}}{\Delta x} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{u_{t,i+1} - 2u_{t,i} + u_{t,i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.2)$$

となる。ただし x_t を時間、 x_i を位置とし、 $u_{t,i}$ は時刻 x_t 位置 x_i における速度とする。そして C と D を

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}, \quad (5.3)$$

$$D = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (5.4)$$

とする。すると、式(5.2)は式(5.3)、式(5.4)より

$$u_{t+1,i} - u_{t,i} = -C(u_{t,i} - u_{t,i-1}) + D(u_{t,i+1} - 2u_{t,i} + u_{t,i-1})$$

となる。さらに上式を変形すると

$$u_{t+1,i} = (-C - 2D + 1)u_{t,i} + (C + D)u_{t,i-1} + Du_{t,i+1} \quad (5.5)$$

となる。ここで、参考文献[1][2][3]よりパタンカーの正係数条件を用いると、上式の係数 $-C - 2D + 1$ 、 $C + D$ 、 D が全て正となれば、式(5.2)の解析結果は安定する。よって安定条件は

$$0 \leq D \leq \frac{1-C}{2}, \quad (5.6)$$

$$0 \leq C \leq 1 \quad (5.7)$$

となる。

5.3 2次精度中心差分の安定性解析

次に、バーガス方程式の時間項をオイラー解法、移流項と拡散項を2次精度中心差分で離散化すると

$$\frac{u_{t+1,i} - u_{t,i}}{\Delta t} = -u \frac{u_{t,i+1} - u_{t,i-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{u_{t,i+1} - 2u_{t,i} + u_{t,i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.8)$$

となる。ただし $u_{t,i} \geq 0$ とする。すると、式(5.3)、式(5.4)より

$$u_{t+1,i} - u_{t,i} = -\frac{C}{2}(u_{t,i+1} - u_{t,i-1}) + D(u_{t,i+1} - 2u_{t,i} + u_{t,i-1})$$

となる。さらに上式を変形すると

$$u_{t+1,i} = (1 - 2D)u_{t,i} + \left(\frac{C}{2} + D\right)u_{t,i-1} + \left(-\frac{C}{2} + D\right)u_{t,i+1} \quad (5.9)$$

となる。ここで、パタンカーの正係数条件より上式の係数 $-C/2 + D$ 、 $C/2 + D$ 、 $1 - 2D$ が全て正となれば、式(5.8)の解析結果は安定する。よって安定条件は

$$\frac{C}{2} \leq D \leq \frac{1}{2}, \quad (5.10)$$

$$-2D \leq C \leq 2D \quad (5.11)$$

となる。

5.4 高次精度風上差分の安定性解析

1次精度風上差分と同様に、2次精度風上差分の安定性を解析する。時間項をオイラー解法、移流項を2次精度風上差分、拡散項を2次精度中心差分で離散化すると、安定条件は

$$0 \leq D \leq \frac{2 - 3C}{2}, \quad (5.12)$$

$$0 \leq C \leq \frac{2 - 4D}{3}, \quad (5.13)$$

$$C \leq -\frac{1}{2}D \quad (5.14)$$

となる。ただし $u_{t,i} \geq 0$ とする。ここで、 $u > 0$ より $C > 0$ なので、式(5.14)よりこの安定性条件は必ず満たせないことが分かる。

次に、3次精度風上差分の安定性を解析する。時間項をオイラー陽解法、移流項を3次精度風上差分、拡散項を2次精度中心差分で離散化すると、安定条件は

$$\frac{1}{6}C \leq D \leq \frac{2-C}{4}, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{6}C \leq D \leq -\frac{1}{6}C, \quad (5.16)$$

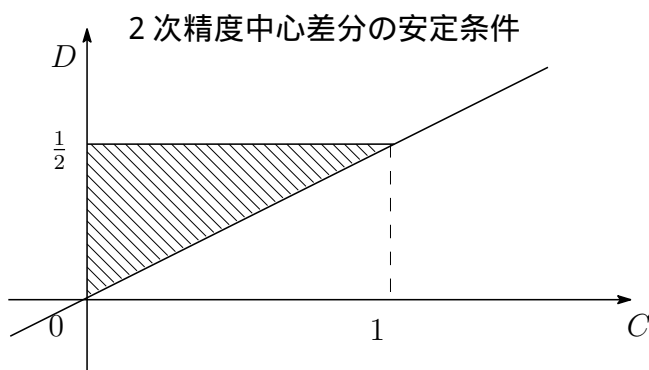
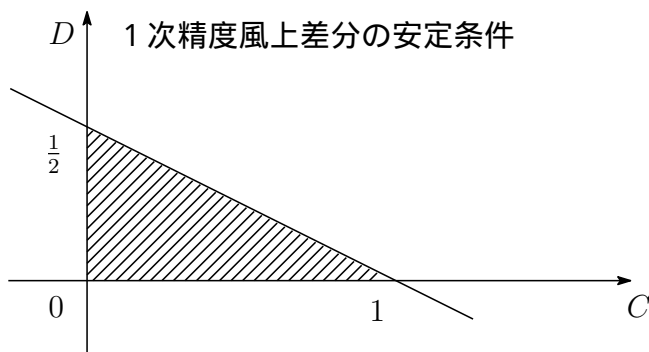
$$0 \leq C \leq 2 - 4D, \quad (5.17)$$

$$C \leq 0 \quad (5.18)$$

となる。ただし $u_{t,i} \geq 0$ とする。ここで、式(5.18)よりこの安定性条件は必ず満たせないことが分かる。

5.5 1次精度風上差分と2次精度中心差分の安定性の比較

移流項の離散化に1次精度風上差分を用いたときと、2次精度中心差分を用いたときの安定性を比較する。それぞれの安定領域を図示すると



となる。ここで、 C と D の値は非常に小さくなるので、中心差分に比べ、風上差分が安定することが分かる。

第 6 章

有限要素法

6.1 はじめに

有限差分法と同様、物体の変形や応力を解析するための手段として、有限要素法という方法がある。有限要素法は誤差解析が知られ精度保証ができるため、有限差分法と並びよく使われている。この章では有限要素法について説明する。特に、有限要素法の考え方として重み付け残差法について紹介する。

6.2 1次元有限要素法

6.2.1 解析の方法

有限要素法で偏微分方程式を解析する際には、まず解析領域を有限要素メッシュに分割し、各々の要素内で成り立つ連立一次方程式を作成する。次に、各要素における方程式を全解析領域分足し合わせ、大きな連立一次方程式を作成する。そして、最後に境界条件を加味して解を求める。

6.2.2 重み付け残差法

有限要素法では、残差が最小になる近似解を求める。特に、重み付け残差法では残差を最小する手段として積分を。積分を行うことで、誤差が一箇所に集中せず、領域内に分散する。

$$\int_0^L R(U)\phi(x)dx = 0$$

ただし、 U は近似解、 $\phi(x)$ は重み関数、 L は領域の長さ、 $R(U)$ は残差とする。 $R(U)$ の積分は、ゼロになりえない。そこで重み付け残差法では、 $R(U)\phi(x)$ を領域積分し、それを強制的にゼロとすることで近似解を求める。これにより、残差は領域に分散され、領域内の解析精度も一様化される。

6.2.3 重み関数

重み関数の条件として、まず重み関数は連続であること、そして重み関数は境界において関数値がゼロであること、さらに重み関数は無次元であることが挙げられる。

第 7 章

有限要素法と有限差分法の比較

7.1 はじめに

この章では、有限要素法と有限差分法についての比較を行う。バーガース方程式に比べ拡散項の解析に特化した式である1次元定常熱伝導問題を解き、それぞれの解を比べてみる。

7.2 1次元定常熱伝導問題

1次元定常熱伝導問題である

$$k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = -f$$

を境界条件

$$x = 1 \text{ において } u = a$$

$$x = 0 \text{ において } \frac{\partial u}{\partial x} = b$$

について解いてみる。ただし、 u は温度、 k は熱伝導率、 f は熱発生率、 $\phi(x)$ は重み関数、 a と b は定数とする。

7.3 有限要素法による解法

最初に有限要素法による定式化を行う。まず、重み関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\int_0^1 \left(k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + f \right) \phi(x) dx = 0$$

を導く。この式を部分積分することにより、

$$\int_0^1 f \phi(x) dx + k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} u(x) \phi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} k \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx = 0$$

となる。ここで、重み関数 $\phi(x)$ の境界条件を利用することで

$$\int_0^1 k \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx = \int_0^1 f \phi(x) dx - k \phi(0) b dx$$

という弱形式を導くことができる。

次に、有限要素法を用いた近似を行う。ここでは2つの要素を用いることとする。弱形式を用いて

$$\begin{aligned} & \int k \frac{d\phi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx + \int k \frac{d\phi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx \\ & = \int f \phi(x) dx + \int f \phi(x) dx - k \phi(0) b dx \end{aligned}$$

を導くことができる。

ここで、要素での局所挙動を表現する近似関数は線形関数を使用することで、

$$\begin{aligned}u^h(x) &= u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) \\ \phi^h(x) &= \phi_1 N_1(x) + \phi_2 N_2(x)\end{aligned}$$

となり、さらに変形すると

$$\begin{aligned}N_1(x) &= \frac{x_2 - x}{h}, \\ N_2(x) &= \frac{x - x_1}{h}\end{aligned}$$

となる。これを有限要素近似関数と呼ぶ。

ここで、有限要素近似関数を行列形式で表すと以下ようになる。

$$\begin{aligned}u^h(x) &= u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) \\ &= [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix}, \\ \phi^h(x) &= \phi_1 N_1(x) + \phi_2 N_2(x) \\ &= [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix}, \\ \frac{du^h(x)}{dx} &= u_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + u_2 \frac{dN_2(x)}{dx} \\ &= [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix}, \\ \frac{d\phi^h(x)}{dx} &= \phi_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + \phi_2 \frac{dN_2(x)}{dx} \\ &= [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned}N_1(x) &= \frac{x_2 - x}{h}, \\ N_2(x) &= \frac{x - x_1}{h}\end{aligned}$$

となる。さらに弱形式に代入すると以下のような2つの式

$$\int k \frac{d\phi^h(x)}{dx} \cdot \frac{du^h(x)}{dx} dx = \int f \phi^h(x) dx - k\phi^h(0)h$$

$$\int k [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx$$

$$= [\phi_1 \quad \phi_2] \int f \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} dx - k [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \end{bmatrix} b,$$

$$[\phi_1 \quad \phi_2] \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - k [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} b$$

および、

$$\int k \frac{d\phi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx = \int f \phi(x) dx,$$

$$\int k [\phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} dx$$

$$= [\phi_2 \quad \phi_3] \int f \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} dx [\phi_2 \quad \phi_3] \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= [\phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix}$$

が導ける。ここで全体マトリックスの構築をすると、

$$[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \left(\begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kb \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

となり、 $\phi_3 = 0$ なので

$$[\phi_1 \quad \phi_2] \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\phi_1 \quad \phi_2] \left(\begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kb \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

となる。さらに、 $u_3 = 0$ なので

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{fh}{2} - kb \\ fh \end{bmatrix} - \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \right)$$

となる。ここで、 ϕ_1 と ϕ_2 は任意のため

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} - kb \\ fh \end{bmatrix} - \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

となる。

また、 $k = 1$ とすると

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} - b \\ fh \end{bmatrix} - \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

となり、さらに式変形すると

$$\frac{2(-u_1 + u_2 - hb)}{h^2} = -f,$$

$$\frac{a - 2u_2 + u_1}{h^2} = -f$$

が導ける。

7.4 有限差分法による解法

まず、中央差分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

である。次に前進差分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

である。さらに、後退差分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

である。上記の3つの差分式から、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

を導ける。さらに、偏微分方程式より

$$\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{(\Delta x)^2} = -f,$$

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{(\Delta x)^2} = -f$$

境界条件より

$$u_3 = a,$$

$$\frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} = b$$

なので、

$$\frac{2(-u_1 + u_2 - \Delta x b)}{(\Delta x)^2} = -f,$$

$$\frac{a - 2u_2 + u_1}{(\Delta x)^2} = -f$$

となり、有限要素法と同じ式が導ける。よって、1次元熱伝導問題においては有限差分法と有限要素法では、熱伝導率 k が 1 の場合に限り、同じ解を導けることが分かる。

第 8 章

結論と今後の課題

本研究では、まず1次元バーガス方程式の数値解法における離散化手法として、風上差分と中心差分を挙げ、比較した。その中で、中心差分に比べ風上差分は精度は悪いが、一般的に計算が安定することが確認できた。そして、風上差分と中心差分には相性があり、それぞれの精度により安定性が変わることが分かった。相性についての詳細は今後の課題としていきたい。また、本研究の過程で風上差分では粘性項を利用して数値拡散を防いでいるが、粘性が解の質を低下させていることが分かった。粘性項を利用せずに数値拡散を防ぐことはできるのか興味を持ったので、今後の課題としていきたい。

次に1次元定常熱伝導問題における数値解法として、有限要素法と有限差分法を比較した。その中から言えることは、有限差分法と有限要素法では計算の解が等しくなる条件があると予想できた。このことについての詳細は今後の課題としていきたい。また、有限要素法と同様に、有限差分法でも精度保証はできないのか興味を持ったので、今後の課題としていきたい。

謝辭

本研究を進めるに当たり、終始丁寧な御指導及び御激励を賜り、最後まで面倒を見て下さいました大石 進一教授に深く感謝いたします。また、大変お忙しい中でも私の質問に対して熱心に答え、御教示して下さいました、松永奈美博士にも深く感謝いたします。そして、研究のパートナーの鈴木大育氏にも、共に研究を続けていけたこと、より語り合えたことを深く感謝いたします。最後に本論文に御指導、御協力を頂いた皆様に心から感謝いたします。どうもありがとうございました。

参考文献

- [1] 山本稔:常微分方程式の安定性, 実教出版株式会社 (1979).
- [2] 富山明男, 高橋亮一:原子力誌,32[10],53(1990).
- [3] 酒井勝弘:原子力誌,34[6],46(1992).
- [4] 高橋亮一:差分法, 培風館 (1991).
- [5] 菊池文雄:有限要素法の数理, 培風館 (1994).
- [6] 水元久夫:有限要素法理論編, 森北出版株式会社 (1983).
- [7] 八田夏夫:流れの計算, 森北出版株式会社 (1994)
- [8] 河村哲也:偏微分方程式の差分解法, 東京大学出版会 (1994).